

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k}; \quad I_0 = (-\infty, 1), \quad I_1 = (1, 2), \quad I_2 = (2, 3), \dots$$

$$\dots, \quad I_i(i, i+1), \quad \dots, \quad I_{69} = (69, 70), \quad I_{70} = (70, +\infty).$$

Az $f(x)$ értelmezési tartománya $I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{70}$, mivel $f(x)$ az 1, 2, 3, ..., 70 értékek kivételével nyilván mindenütt értelmes. $f(x)$ az értelmezési tartományában folytonos, mert folytonos függvények összegeként áll elő.

1988-10-294-1.eps

Az egyes intervallumokban $f(x)$ szigorúan monoton csökken, hiszen szigorúan monoton csökkenő függvények $\left(\frac{1}{x-1}, \frac{2}{x-2}, \dots, \frac{70}{x-70}\right)$ összegeként áll elő.

I_0 -ban a függvény csak negatív értékeket vesz fel, az $\frac{1}{x-1}, \frac{2}{x-2}, \dots, \frac{70}{x-70}$ törtek mindegyike negatív ebben az intervallumban.

Az $I_1, I_2, \dots, I_{69}$ intervallumban $f(x)$ minden valós értéket felvesz, az egyes intervallumokon belül $f(x)$ folytonos, másrészt, mint azt látni fogjuk, az intervallumok bal oldalán $f(x)$ jobb oldali határértéke $+\infty$; az intervallumok jobb oldalán $f(x)$ bal oldali határértéke $-\infty$. Ezt a következő módon láthatjuk be: legyen „a” az 1, 2, 3, ..., 70 egészek bármelyike. Ekkor

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} \sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} = \sum_{k=1}^{70} \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{k}{x-k} = +\infty,$$

$k = a$ esetén

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{k}{x-k} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{a}{x-a} = +\infty,$$

minden más esetben $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{k}{x-k}$ véges. Hasonlóképpen igaz, hogy $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$.

Már láttuk, hogy $f(x)$ -nek az $x = 70$ helyen vett jobb oldali határértéke $+\infty$. Másrészt igaz az is, hogy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, hiszen $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \sum_{k=1}^{70} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x-k} = \sum_{k=1}^{70} 0 = 0$. Így az I_{70} intervallumban a függvény minden pozitív értéket felvesz.

A függvény menete tehát a következő (vázlatosan):

Az $f(x) = \frac{5}{4}$ egyenletnek tehát az I_0 intervallum kivételével mindegyik intervallumban van megoldása, a szigorú monotonitás miatt minden intervallumban pontosan egy. A gyökök legyenek rendre $x_1, x_2, \dots, x_{70}$. Ekkor $1 < x_1 < 2 < x_2 < 3 < \dots < 70 < x_{70}$.

Az $f(x) \geq \frac{5}{4}$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza ekkor nyilván az $(1, x_1] \cup (2, x_2] \cup \dots \cup (70, x_0]$ halmaz. Ezek valóban diszjunkt intervallumok, összhosszuk:

$$S = (x_1 - 1) + (x_2 - 2) + \dots + (x_{70} - 70) = (x_1 + x_2 + \dots + x_{70}) - (1 + 2 + \dots + 70)$$

Hozzuk közös nevezőre a

$$-\frac{5}{4} + f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \dots + \frac{70}{x-70} - \frac{5}{4}$$

összeget.

$$-\frac{5}{4} + f(x) = \frac{1 \cdot (x-2)(x-3) \dots (x-70) + 2 \cdot (x-1)(x-3) \dots (x-70)}{(x-1)(x-2) \dots (x-70)} +$$

$$+ \dots + \frac{70(x-1)(x-2) \dots (x-69)}{(x-1)(x-2) \dots (x-70)} - \frac{\frac{5}{4}(x-1)(x-2) \dots (x-70)}{(x-1)(x-2) \dots (x-70)};$$

(A két sor egyetlen törtnek tekintendő.) A számláló egy 70-ed fokú polinom, főegyütthatója $a_{70} = -\frac{5}{4}$. A 69-ed fokú tag együtthatója:

$$a_{69} = 1 + 2 + \dots + 70 + \frac{5}{4}(1 + 2 + \dots + 70) = \frac{9}{4}(1 + 2 + \dots + 70).$$

Másrészt az $f(x) = \frac{5}{4}$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha az $f(x) - \frac{5}{4}$ tört számlálója 0, így az $x_1, x_2, \dots, x_{70}$ gyökök megegyeznek a fenti tört számlálójában szereplő polinom gyökeivel, így összegük is megegyezik. A Vieta-formula¹ szerint

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{70} = \frac{-a_{69}}{a_{70}} = \frac{-\frac{9}{4}(1 + 2 + \dots + 70)}{-\frac{5}{4}} = \frac{9}{5}(1 + 2 + \dots + 70).$$

Az intervallumok összhossza tehát:

$$\begin{aligned} S &= \frac{9}{5}(1 + 2 + \dots + 70) - (1 + 2 + \dots + 70) = \frac{4}{5}(1 + 2 + \dots + 70) = \\ &= \frac{4}{5} \cdot 71 \cdot 70 \cdot \frac{1}{2} = 2 \cdot 71 \cdot 14 = 1988, \end{aligned}$$

és ezt kellett bizonyítani.

Drasny Gábor (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

¹ Legyen az $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$ komplex együtthatós polinom gyöktényezős alakja

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_n);$$

az együtthatók összehasonlítása alapján adódó összefüggések:

$$\begin{aligned} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n &= -a_1, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n &= a_2, \\ &\vdots \\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n &= (-1)^n a_n. \end{aligned}$$

Ezeket nevezzük Viéta-formuláknak.