

Vegyük észre, hogy ha n kettes számrendszerbeli jegyeit visszafele olvassuk (jobbról balra), akkor $f(n)$ -et kapjuk! Ezt az állítást n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Nyilván:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 1, \quad f(3) = 3, \quad f(4) = 1.$$

Tegyük fel, hogy az állítás $(n-1)$ -ig igaz, és bizonyítsuk n -re.

a) $n = 2k$ esetén legyen $f(k) = z$.

$$f(n) = f(2k) = f(k) = z.$$

b) Ha $n = 4k + 1$, legyen $2^{t-1} \leq k < 2^t$, és $f(k) = z$,

$$f(n) = 2f(2k+1) - f(k) = 2 \cdot (2^{t+1} + z) - z = 2^{t+2} + z.$$

c) Ha $n = 4k + 3$, legyen $2^{t-1} \leq k < 2^t$, és $f(k) = z$,

$$f(n) = 3f(2k+1) - 2f(k) = 3 \cdot (2^{t+1} + z) - 2z = 3 \cdot 2^{t+1} + z.$$

A feladat megoldásait tehát azok az 1 és 1988 közé eső számok adják, melyeket ha kettes számrendszerben írunk fel, visszafele olvasva ugyanazt kapjuk. Ezeket hívjuk *palindrom* számoknak. Számoljuk össze őket.

A kettes számrendszerben $2n$ jegyű palindrom 2^{n-1} van, mert az első számjegy 1, a másodiktól az n -edik helyig állhat 0 vagy 1, ez 2^{n-1} lehetőség, és az utolsó n jegy egyértelműen meghatározott.

Hasonló okból $2n+1$ jegyű palindrom 2^n db van.

1988 a kettes számrendszerben: 11111000100 (11 jegyű). Ennél a legfeljebb 10 jegyű palindromok mind kisebbek. Ezek száma 62. Az 1988 a 11 jegyű palindromok közül az $1967 = 11110101111$ és $2015 = 11111011111$ közé esik, ezért az 1988-nál kisebb 11 jegyű palindromok száma 30.

Összesen tehát a feladatnak 92 db megoldása van.

Csirik János (Szeged, JATE Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o. t.)