

Először azt bizonyítom be, hogy a B halmaz minden eleme pontosan két A_i -ben fordul elő. A c) feltétel szerint minden elem legalább két A_i -ben szerepel, ezért elegendő azt megmutatni, hogy egyik elem sem fordul elő legalább három részhalmazban.

Tegyük fel, hogy X mégis eleme az A_i , A_j , A_k halmazoknak, ebből ellentmondáshoz fogunk jutni. A b) feltétel szerint az A_i , A_j , A_k halmazok közül semelyik kettőnek nincs az X -től különböző közös eleme. A három halmaz X -en kívüli, összesen $3 \cdot (2n - 1)$ eleme így mind különböző. A továbbiakban nevezzük ezeket „mókás” elemeknek.

A c) feltétel szerint minden mókás elem előfordul legalább egyszer a további $2n - 2$ halmazban. Összesen $3 \cdot (2n - 1)$ mókás elem van, ezért valamelyik halmazban közülük 4 fordul elő ($3(2n - 2) - 3(2n - 1)$). Ekkor ennek a halmaznak az A_i , A_j , A_k valamelyikével legalább 2 közös eleme van, ami ellentmond a b) feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy a B halmaz minden eleme pontosan két A_i -ben szerepel.

Tegyük fel ezután, hogy megadtuk a megfelelő hozzárendelést a B halmaz elemein. Mivel minden A_i -nek n eleméhez rendeltünk 0-t, ezért halmazonként leszámolva összesen a $n(2n + 1)$ elemhez rendeltünk 0-t. Láttuk másfelől, hogy minden elem pontosan két halmazban fordul elő, ezért a B halmaz $\frac{n(2n + 1)}{2}$ eleméhez rendeltünk 0-t. Ez pedig csak akkor egész, ha n páros, tehát szükséges feltétel, hogy n páros legyen.

Be fogjuk bizonyítani, hogy ez a feltétel elégséges, ilyenkor megadható az előírt hozzárendelés. Írjuk fel egy szabályos $(2n + 1)$ -szög csúcsaira az $1, 2, \dots, 2n + 1$ számokat. Húzzuk be azokat az átlókat, melyek két olyan csúcsot kötnek össze, melyek között legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ csúcs van. (Ez egész, mivel n páros.) Így minden csúcsból n átlót húztunk be.

Jelöljük A_i és A_j közös elemét (i, j) -vel ($i < j$). Ez egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, mivel minden elem pontosan két halmazban szerepel, és b) fennáll.

(i, j) -hez pontosan akkor rendeljük 0-t, ha az i és j csúcs közötti átlót behúztuk. Mivel minden csúcsból n átló indul, ezért ez egy megfelelő hozzárendelés.

Tehát akkor és csak akkor végezhető el megfelelő hozzárendelés, ha az n páros.

Keleti Tamás (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)