

5. feladat. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely a nem-negatív valós számok R_0^+ halmazán van értelmezve, csak nem-negatív valós értéket vesz fel és teljesíti a következő három feltételt:

- (a) $f(x \cdot f(y)) \cdot f(y) = f(x + y)$ minden $x, y \in R_0^+$ esetén;
- (b) $f(2) = 0$;
- (c) $f(x) \neq 0$, ha $0 \leq x < 2$.

Megoldás. Először két egyszerű megállapítást teszünk. Egyrészt $f(0) = 1$, hiszen az (a) feltételt $x = y = 0$ esetén alkalmazva $f(0) = f(0 \cdot f(0)) \cdot f(0) = f(0)^2$, tehát $f(0)$ értéke csak 0 vagy 1 lehet, de az első lehetőséget a (c) feltétel kizárja. Másrészt $x \geq 2$ esetén $f(x) = 0$ adódik könnyen, ha az (a) feltételbe $x - 2$ és 2 értékeket írunk: $f(x) = f((x - 2) \cdot f(2)) \cdot f(2) = 0$ a (b) feltétel miatt.

Tegyük fel most, hogy $0 < x < 2$, ekkor persze $0 < 2 - x < 2$ is teljesül és így az (a) feltételt alkalmazva a $2 - x$ és x számokra $f((2 - x) \cdot f(x)) \cdot f(x) = f(2) = 0$ adódik. Itt (c) miatt $f(x) \neq 0$, $((2 - x) \cdot f(x)) = 0$, tehát ismét

csak (c)-t alkalmazva a $(2 - x) \cdot f(x) \geq 2$, $f(x) \geq \frac{2}{2 - x}$ egyenlőtlenséget kapjuk. A továbbiakban belátjuk, hogy itt

egyenlőség áll. Tegyük fel ugyanis, hogy valamely $0 < y < 2$ esetén $f(y) > \frac{2}{2 - y}$, vagyis $f(y) = \frac{2}{2 - y} + d$, ahol d

pozitív. Ekkor található olyan x pozitív szám, melyre $\frac{2}{f(y)} = \frac{2}{\frac{2}{2 - y} + d} < x < 2 - y$. Erre az x, y párra $x + y < 2$,

tehát $f(x + y) > 0$; valamint $x \cdot f(y) > 2$, $f(x \cdot f(y)) = 0$ áll fenn. Így az (a) feltétel nem teljesül rájuk, és ez az ellentmondás mutatja, hogy valóban minden $0 < y < 2$ esetén $f(y) = \frac{2}{2 - y}$. Az eddigiek során tehát megállapítottuk, hogy a feladat feltételeinek csak a következő függvény tehet eleget:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2 - x}, & \text{ha } 0 \leq x < 2, \\ 0, & \text{ha } x \geq 2. \end{cases}$$

Most már csak azt kell megvizsgálnunk, hogy ez a függvény valóban megfelel-e a követelményeknek. Ezt azonban az olvasóra bizzuk, könnyen látható, hogy ez a függvény jó.