

4. feladat. Legyenek A és B egy O középpontú szabályos n -szög ($n \geq 5$) szomszédos csúcsai. Egy, az OAB háromszöggel egybevágó XYZ háromszöggel először befedjük OAB -t, majd az X pontot úgy mozgatjuk – mindig az n -szög belsejében –, hogy közben az Y és Z pontok állandóan az n -szög oldalain legyenek. Milyen alakzatot ír le X , ha Y befutja az n -szög határát (kerületét)?

1986-11-357-1.eps

Megoldás. Állítjuk, hogy a keresett ponthalmaz n darab zárt szakaszból áll, amelyek hossza $OB \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right)$,

és amelyek az n -szög csúcsait O -val összekötő szakaszok O -n túli meghosszabbításai.

Ha Y és Z két szomszédos csúccsal esik egybe, akkor $X \equiv O$; a többi esetben X két szomszédos oldal által határolt kisebbik szögtartományban helyezkedik el (ennek igazolásától most eltekintünk).

Legyen most Y az AB , Z pedig a vele szomszédos BC oldal belső pontja. Ekkor $YBZ \sphericalangle = ABC \sphericalangle = \pi - \frac{2\pi}{n}$, $YXZ \sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$, e két szög összege tehát π , vagyis az $XYBZ$ négyszög húrnégyszög. Mivel $XY = XZ$ az XYB és XBZ szögekhez egyenlő ívek tartoznak, ezért $XYB \sphericalangle = XBZ \sphericalangle$; az X pont az $YBZ \sphericalangle = ABC \sphericalangle$ szögfelezőjén helyezkedik el.

Vizsgáljuk most meg, mekkora lehet a BZ távolság! Először belátjuk, hogy $BX > OB$. Ugyanis $XYB \sphericalangle + XZB \sphericalangle = \pi$, így közülük az egyik legalább $\frac{\pi}{2}$, mondjuk $XZB \sphericalangle \geq \frac{\pi}{2}$. De $XBZ \sphericalangle < \frac{\pi}{2}$, ezért az XZB háromszögben ezen szögekkel szemben fekvő oldalakra $BX > XZ$ adódik $XZB \sphericalangle > XBZ \sphericalangle$ miatt. És itt $XZ = OB$. Másodszor BX szakasz hosszára felső becslés az $XYBZ$ húrnégyszög köré írható kör átmérője. Ez pedig a szinusz-tétel segítségével

$$\frac{YZ}{\sin YXZ \sphericalangle} = \frac{OB}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right)} = \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}.$$

Ehhez hozzávéve a megoldás elején említett $X \equiv A$, $Y \equiv B$, $Z \equiv O$ esetet,

$$0 \leq OX \leq \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}} - OB = OB \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right)$$

adódik. Ha pedig gondolatmenetünket elvégezzük a többi szomszédos oldalpárra is, akkor kiderül, hogy X csakis a megoldás elején leírt ponthalmaz pontja lehet.

Hátravan még annak igazolása, hogy az említett halmaz minden pontja megfelelő. Legyen X' a BO félegyenesen úgy, hogy $OB < BX' \leq \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}$. Rajzoljuk meg a B -n és X' -n átmenő, $\frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}$ átmérőjű körök valamelyikét (ha $BX' = \frac{OB}{\cos \frac{\pi}{n}}$, akkor csak egy ilyen van). Az olvasóra bízunk annak igazolását, hogy ez a kör metszi az AB és BC szakaszokat. Jelöljük ezen metszéspontokat Y' -vel és Z' -vel. Mivel $Y'BX' \sphericalangle = X'BZ' \sphericalangle$, azért $X'Y' = X'Z'$. Másrészt mivel $X'Y'BZ'$ négyszög húrnégyszög, $Y'X'Z' \sphericalangle = \pi - Y'BZ' \sphericalangle = \frac{2\pi}{n}$. Ezért az $X'Y'Z'$ háromszög hasonló az ABO háromszöghöz, körülírt köreik pedig ugyanakkorák, ezért a két háromszög egybevágó. Ez a megfontolás bizonyítja, hogy a megadott ponthalmaz minden pontja jó.