

3. feladat. Egy szabályos ötszög csúcsaihoz egy-egy egész számot rendelünk úgy, hogy összegük pozitív legyen. Megengedett a következő művelet: ha három szomszédos csúcs X, Y, Z és a hozzájuk rendelt számok x, y, z , és $y < 0$, akkor az x, y, z számok helyére ugyanilyen sorrendben az $x+y, -y, z+y$ számokat írjuk. Ezt a műveletet ismételtetjük addig, amíg csak található negatív y . Döntsük el, vajon minden esetben véget ér-e az eljárás véges sok lépés után!

Megoldás. Az eljárás véges sok lépés után minden esetben véget ér, függetlenül attól, hogy milyen sorrendben végezzük el a lépéseket. Legyen az ötszög csúcsaihoz rendelt öt szám kezdetben a_0, b_0, c_0, d_0, e_0 , az n -edik „művelet” elvégzése után pedig a_n, b_n, c_n, d_n, e_n . Világos, hogy bármely lépés után a számok egészek maradnak, és összegük nem változik, tehát pozitív marad. Defináljuk az S_n nem-negatív egész számot így:

$$S_n = (a_n - c_n)^2 + (b_n - d_n)^2 + (c_n - e_n)^2 + (d_n - a_n)^+ (e_n - b_n)^2.$$

Ha valamely k természetes számra az a_k, b_k, c_k, d_k, e_k számok között van negatív (mondjuk $c_k < 0$), akkor a következő lépés után nyert $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = b_k + c_k, c_{k+1} = -c_k, d_{k+1} = d_k + c_k, e_{k+1} = e_k$ számokra $S_{k+1} < S_k$. Ugyanis behelyettesítéssel

$$S_{k+1} - S_k = 2c_k(a_k + b_k + c_k + d_k + e_k),$$

és itt $c_k < 0, a_k + b_k + c_k + d_k + e_k > 0$, mint azt már említettük. Ez pedig azt jelenti, hogy $S_0, S_1, S_2, \dots$ szigorúan csökkenő nem negatív egész számok. Így sorozatuk csak véges hosszúságú lehet, vagyis az eljárás véges sok lépésben mindig véget ér.