

2. feladat. Adott az $A_1A_2A_3$ háromszög és a síkjában levő P_0 pont. Definiáljuk $s > 4$ esetén az A_s pontot így: $A_s = A_{s-3}$. A P_{n+1} pontot úgy nyerjük, hogy a P_n pontot A_{n+1} körül az óramutató járásával megegyező irányban 120° -kal elforgatjuk. Bizonyítsuk be, hogy ha P_{1986} és P_0 megegyező pontok, akkor az $A_1A_2A_3$ háromszög szabályos.

Megoldás. Vizsgáljuk meg először azt, hogy három egymást követő elforgatás során mi történik az $\overrightarrow{A_1P_0}$ vektorral. Bármelyik elforgatás a vektor irányát 120° -kal változtatja, hosszát pedig megtartja. Így ha a három elforgatás utáni $\overrightarrow{A'_1P_3}$ képét tekintjük, akkor $\overrightarrow{A_1P_0} = \overrightarrow{A'_1P_3}$ adódik. Tehát $A_1P_0P_3A'_1$ négyszög paralelogramma, $\overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{A_1A'_1}$. Hasonló gondolatmenettel adódik $\overrightarrow{P_3P'_6} = \overrightarrow{A_1A'_1}$, általában $\overrightarrow{P_{3k}P_{3k+3}} = \overrightarrow{A_1A'_1}$ minden k természetes számra. Ezért $\overrightarrow{P_0P_{1986}} = \overrightarrow{P_0P_3} + \overrightarrow{P_3P'_6} + \dots + \overrightarrow{P_{1983}P_{1986}} = 662 \cdot \overrightarrow{A_1A'_1}$, tehát, mivel $P_0 = P_{1986}$, $\overrightarrow{P_0P_{1986}}$ és így $\overrightarrow{A_1A'_1}$ is nullvektor, vagyis A_1 megegyezik A'_1 -vel.

1986-11-356-1.eps

Most kövessük nyomon azt, hogyan nyerjük A'_1 -t A_1 -ből. Az A_1 körüli elforgatás helyben hagyja A_1 -et, majd az A_2 körüli 120° -os elforgatás A'_1 -be viszi. A'_1 -t pedig az A_3 körüli (az előzővel megegyező irányú) elforgatás viszi $A_1 = A'_1$ -be. Ezért az $A_1A_2A'_1A_3$ négyszög rombusz, melynek A_2 -nél levő szöge 120° -os, így A_1 -nél 60° -os szöge van. Tehát az $A_1A_2A_3$ háromszög, melynek A_1A_2 és A_1A_3 oldalai egyenlők, valóban szabályos.