

Legyen $s = \{x_0, x_1, \dots\}$ egy megfelelő számsorozat, és legyen

$$S_n = \frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n}.$$

Minden ilyen s sorozatra tekintsük azt az $s^{(1)} = \{y_0, y_1, \dots\}$ sorozatot, amelyet az

$$y_i = \frac{x_{i+1}}{x_1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

összefüggés definiál. Nyilvánvalóan $s^{(1)}$ is megfelelő sorozat, azaz $y_0 = 1$ és $0 < y_{i+1} < y_i$ az $i \geq 0$ esetén, továbbá

$$\begin{aligned} S_n^{(1)} &= \frac{y_0^2}{y_1} + \frac{y_1^2}{y_2} + \dots + \frac{y_{n-1}^2}{y_n} = \frac{1}{x_1} \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} \right) = \\ &= \frac{1}{x_1} \left(S_{n+1} - \frac{x_0^2}{x_1} \right) = \frac{1}{x_1} \left(S_{n+1} - \frac{1}{x_1} \right), \end{aligned}$$

hiszen $x_0 = 1$.

Belátjuk, hogy a feladat (a) állítása nemcsak 3,999-re, hanem minden 4-nél kisebb pozitív a számra teljesül. Valóban, tegyük fel, hogy mégis volna olyan megfelelő s számsorozat, melyre minden n -re $S_n < a$ teljesül. Ekkor a fent definiált $s^{(1)}$ sorozat olyan, hogy minden n -re

$$S_n^{(1)} = \frac{1}{x_1} \left(S_{n+1} - \frac{1}{x_1} \right) < \frac{1}{x_1} \left(a - \frac{1}{x_1} \right) = \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{x_1} \right)^2 \leq 4 \cdot \left(\frac{a}{4} \right)^2.$$

Az $s^{(1)}$ -ből ugyanilyen módon képzett $s^{(2)}$ sorozatra

$$S_n^{(2)} < \frac{(a^2/4)^2}{4} = 4 \cdot \left(\frac{a}{4} \right)^4,$$

s általában ha az $s^{(k+1)}$ sorozatot a fenti mintára kapjuk az $s^{(k)}$ sorozatból, akkor minden n -re

$$S_n^{(k+1)} < \frac{1}{4} \left(4 \cdot \left(\frac{a}{4} \right)^{2^k} \right)^2 = 4 \cdot \left(\frac{a}{4} \right)^{2^{k+1}}.$$

Indirekt feltevésünk szerint $a < 4$, tehát $a/4 < 1$, így a jobb oldal elég nagy k -ra kisebb 1-nél. De ez lehetetlen, hiszen ha $s^{(k+1)} = \{z_0, z_1, \dots\}$, akkor például

$$S_0^{k+1} = \frac{z_0^2}{z_1} = \frac{1}{z_1} > 1.$$

Ezzel a feladat (a) állítását bebizonyítottuk.

Legyen most $s = \{x_0, x_1, \dots\}$ olyan megfelelő sorozat, melyre $S_n < 4$ minden n -re. Az előbbieket $a = 4$ -re alkalmazva kapjuk, hogy az $s^{(1)}$ sorozatra

$$S_n^{(1)} < \frac{a^2}{4} - \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{x_1} \right)^2 = 4 - \left(2 - \frac{1}{x_1} \right)^2$$

minden n -re. Az előbb láttuk, hogy $4 - \left(2 - \frac{1}{x_1} \right)^2 < 4$ nem lehetséges, így x_1 csak $1/2$ lehet. Ekkor az $s^{(1)}$ sorozat

tagjai rendre $1, 2x_2, 2x_3, \dots$. Mivel az $s^{(1)}$ sorozatra is igaz, hogy $S_n^{(1)} < 4$ minden n -re, azért az $s^{(1)}$ sorozat második tagja, $2x_2$, csak $1/2$ lehet. Ezért $x_2 = 1/4$, és az $s^{(2)}$ sorozatra, melynek tagjai így $1, 4x_3, 4x_4, \dots$, $S_n^{(2)} < 4$ teljesül minden n -re. Ezt folytatva kapjuk, hogy ha van olyan megfelelő sorozat, mely teljesíti a feladat (b) részének feltételeit, akkor az csak az $1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^n, \dots$ sorozat lehet, ez pedig könnyen láthatóan jó. Így nemcsak megadtunk ilyen sorozatot, hanem azt is bizonyítottuk, hogy csak egy ilyen van.