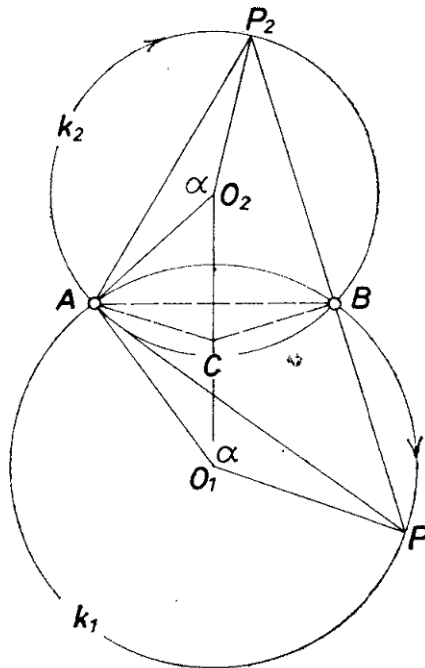


Jelöljük a k_1 , ill. k_2 körök középpontját O_1 -gyel, ill. O_2 -vel, a két kör A -tól különböző metszéspontja legyen B . Először megmutatjuk, hogy a P_1, P_2, B pontok a mozgás bármely pillanatában egy egyenesen vannak.

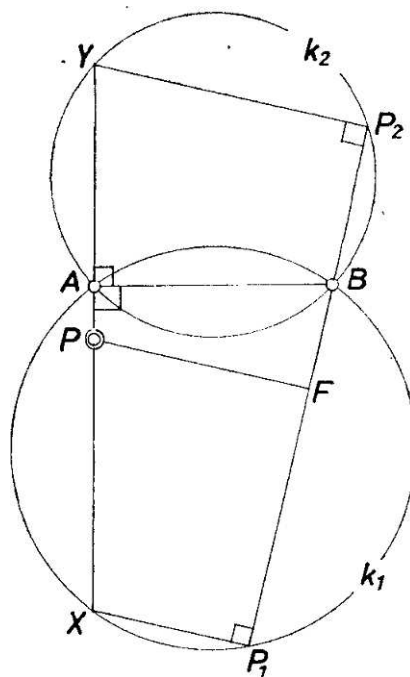
Ehhez figyeljük meg a következőket: ha az $AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, \dots$ hasonló, és egyező körüljárású háromszögeknél a $B_1, B_2, B_3, \dots$ pontok egy egyenesen vannak, akkor a $C_1, C_2, C_3, \dots$ pontok is egy egyenesen fekszenek. Ez egyszerűen következik abból, hogy a $B_1, B_2, B_3, \dots$ pontokat az A középpontú, B_1AC_1 szögű és AC/AB arányú forgatványújtás viszi át rendre a $C_1, C_2, C_3, \dots$ pontokba, és a forgatványújtás egyenestartó. Ez igaz abban az esetben is, ha a hasonló háromszögek helyett egy egyenesbe eső hasonló ponthármakat mondunk.



1. ábra

A feladat feltétele szerint a P_1, P_2 pontok a körök középpontjai körül állandó szögsebességgel forognak. Tegyük fel, hogy pl. a kiindulási A helyzettől α szöggel fordultak el ($0 < \alpha < 2\pi$) (1. ábra). Az AO_1P_1, AO_2P_2 egyező körüljárású, hasonló, egyenlő szárú (esetleg elfajult) háromszögek. Mivel az O_1O_2 egyenes az AB szakasz felező merőlegese, szerkeszthetünk rajta olyan C pontot, hogy az ACB és AO_1P_1 háromszögek hasonlóak és egyező körüljárásúak legyenek. Előző megjegyzésünk értelmében így a P_1, P_2, B pontok valóban egy egyenesen vannak, mivel O_1, O_2, C is egy egyenesen fekszenek.

Elegendő most már azt bizonyítanunk, hogy a P_1P_2 szakasz felező merőlegese – a P_1P_2 szakasz elhelyezkedésétől függetlenül – átmegy egy rögzített ponton. Messe az AB -re A -ban állított merőleges a k_1 , ill. k_2 kört X -ben, ill. Y -ban, és legyen XY felezőpontja P (2. ábra).



2. ábra

A BX és BY szakaszok Thalész tétele szerint körökben átmérők, ezért az XP_1P_2 és YP_2P_1 derékszög, az XP_1P_2Y négyszög tehát derékszögű trapéz (hurkolt is lehet, és derékszögű háromszöggé is fajulhat). Következésképpen a P_1P_2 szár felező merőlegese átmegy a rögzített XY szár P felezési pontján; ezzel állításunkat igazoltuk.