

Először megmutatjuk, hogy ha van olyan $n \geq i > j$ számpár, amelyekre $a_i < a_j$, akkor az egyenlőtlenség bal oldalát csökkenthetjük azzal, hogy a_i -t és a_j -t felcseréljük. Ugyanis a változás

$$\left(\frac{a_j}{i^2} + \frac{a_i}{j^2}\right) - \left(\frac{a_i}{i^2} + \frac{a_j}{j^2}\right) = (a_j - a_i) \left(\frac{1}{i^2} - \frac{1}{j^2}\right) < 0.$$

Mivel az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számokat csak véges sokféleképpen permutálhatjuk, a cseréket elég sokszor elvégezve a számaink már monoton nőnek, s közben a bal oldal értéke minden esetre nem nőtt. S mivel ekkor már $a_1 \geq 1, a_2 \geq 2, \dots, a_n \geq n$, kapjuk, hogy az legalább

$$\frac{1}{1^2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{3^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

amit bizonyítani kellett.

Megjegyzés. Ugyanezzel a gondolatmenettel látható be a következő állítás is: ha

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \quad \text{és} \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$$

tetszőleges számsorozatok, $i_1, i_2, \dots, i_n$ pedig az $1, 2, \dots, n$ számok tetszőleges permutációja, akkor

$$\sum_{k=1}^n x_k y_{n+1-k} \leq \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \leq \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$