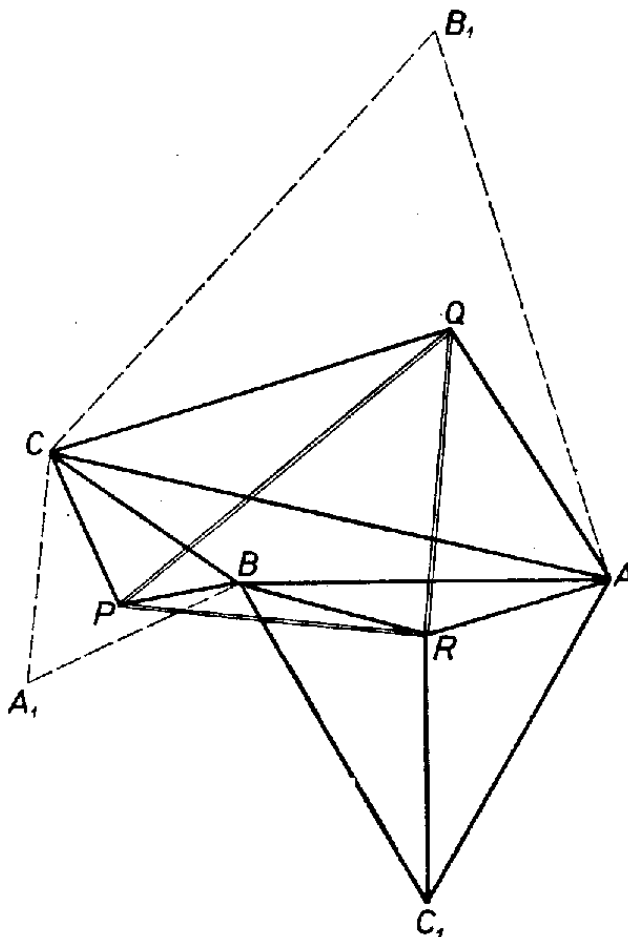


Rajzoljunk az ABC háromszög AB oldalára kifelé szabályos háromszöget, ennek a harmadik csúcsát jelöljük C_1 -gyel. Mivel az ABR háromszög egyenlő szárú, R is, C_1 is az AB szakasz felező merőlegesén van, és a BC_1R , AC_1R háromszögek e felezőmerőlegesre szimmetrikusan helyezkednek el. Mivel e háromszögekben

$$RBC_1 \sphericalangle = RAC_1 \sphericalangle = 45^\circ, \quad RC_1B \sphericalangle = RC_1A \sphericalangle = 30^\circ,$$

ezek a háromszögek hasonlóak a BCP , ACQ háromszögekhez, és az egyes háromszögek csúcsait úgy soroltuk fel, hogy e felsorolás szerint azonos helyzetűek feleljenek meg a valóságban egymásnak. A BC_1R , BAR , BAC , BPC háromszögek egy-egy oldalukkal csatlakoznak egymáshoz, és ez az oldaluk rendre elválasztja őket. Emiatt e háromszögek körüljárása rendre ellentétes, így a BC_1R , BCP háromszögek körüljárása megegyezik. Hasonlóan látható be, hogy az AC_1R , ACQ háromszögek körüljárása is egyező.

Forgassuk el a C_1 pontot B körül addig, amíg a BR félegyenesre nem kerül, majd alkalmazzunk $BC_1 : BR$ arányú kicsinyítést. Mivel a BC_1R , BCP háromszögek hasonlóak, és hasonló helyzetűek, ugyanez a transzformáció C -t P -be viszi, tehát a transzformáció a CC_1 szakaszhoz a PR szakaszt rendeli. Összefoglalva forgatva nyújtásnak nevezzük azt a transzformációt, mely egy forgatás, majd egy, a forgatással azonos centrumú nyújtás (vagy mint esetünkben, kicsinyítés) egymás utáni végrehajtásából áll. Mivel az AC_1R , ACQ háromszögek is hasonlóak és hasonló helyzetűek, az az A centrumú forgatva nyújtás, amely C_1 -t R -be viszi, C -hez Q -t rendeli; és a CC_1 szakaszhoz az RA szakaszt rendeli. E két forgatva nyújtás aránya megegyezik, mert a BC_1R , AC_1R háromszögek egybevágóak. Mindkettőben a forgatás 45° -os, hiszen ekkorák a C_1BR , C_1AR szögek. Emiatt a CC_1 szakasznak a két transzformációból származó RP , RQ képei egyenlő hosszúak, és a CC_1 egyenessel 45° -os szöget zárnak be. Mivel a C_1BR , C_1AR szögek szimmetrikusak a C_1R egyenesre, az irányításuk ellentétes, és így az RP , RQ szakaszok közti szög 90° -os. A bizonyítást ezzel befejeztük.



Megjegyzések. 1. Legyen A -nak a CQ egyenesre, illetve B -nek CP -re vonatkozó tükörképe B_1 , illetve A_1 . Az AB_1C , A_1BC háromszögek is szabályosak, és bennük a Q , P pontok hasonló helyzetűek. Hasonló hozzájuk R -nek is a helyzete az ABC_1 háromszögben, csak az ABC_1R alakzatnak az ABC háromszöghöz viszonyított helyzete különbözik az AB_1CQ , A_1BCP alakzatokétól. Érdeemes megvizsgálni, hogy módosul az állítás, ha a P , Q , R pontokat a PC , QC , RC_1 egyenes más, alkalmasan választott pontjaival (például a PC , QC , RC_1 szakaszok felezőpontjaival) helyettesítjük.

2. Beláthatjuk állításunk helyességét annak alapján is, hogy ha egymás után alkalmazzuk azt a P , Q , R körüli forgatva nyújtást, melyek közül az első B -t C -be, a második C -t A -ba, a harmadik A -t B -be viszi, eredőül azt a transzformációt kapjuk, mely minden ponthoz önmagát rendeli.