A vizsgálandó kifejezés a binomiális tételben szereplő kifejezésre emlékeztet. Ez adja az ötletet, hogy az

$$(1+\sqrt{2^3})^{2n+1}$$

kifejezést vizsgáljuk. A binomiális tételt alkalmazva:

$$(1+2\sqrt{2})^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}2^{3k}+2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}2^{3k}.$$

Az első szummát jelöljük a_n-nel, a másodikat b_n-nel. Ekkor

$$(1)\qquad (1+2\sqrt{2})^{2n+1}=a+2\sqrt{2}b_n,\qquad \text{(ahol } a_n \text{ és } b_n \text{ egészek).}$$

Azt kell bebizonyítanunk, hogy $5\nmid b_n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$. Megmutatjuk, hogy az $(1+2\sqrt{2})^{2n+1}$ szám $x+2\sqrt{2}y$ alakban $(x,\ y$ egész) egyértelműen írható fel, ugyanis az $x+2\sqrt{2}y=x'+2\sqrt{2}y'$ egyenlet átrendezéséből $x-x'=(y-y')2\sqrt{2}$ következik. Ha $y-y'\neq 0$ lenne, akkor

$$\sqrt{2}=\frac{x-x'}{2(y-y')},\qquad \text{azaz}$$

$\sqrt{2}$ racionális volna. Tehát $y=y'$, s ekkor $x=x'$.

(1)-ből következik, hogy

$$\begin{aligned} a_{n+1}+2\sqrt{2}b_{n+1}&=(1+2\sqrt{2})^{2n+1}\cdot(1+2\sqrt{2})^2=(a_n+b_n\cdot 2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})^2=\\ &=(9a_n+16b_n)+2\sqrt{2}(9b_n+2a_n).\end{aligned}$$

Az említett egyértelműség miatt:

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=9a_n+16b_n,\\ b_{n+1}&=2a_n+9b_n.\end{aligned}$$

Ezekből két egymás utáni helyettesítéssel:

$$(2)\qquad b_{n+2}=1593b_n+550a_n$$

(1)-ből:

$$a_0=b_0=1.$$

Rekurziós képletünkből következik, hogy $b_1=11,\ b_2=149$ azaz $5\nmid b_1$ és $5\nmid b_2$. Mivel $(1593,5)=1$, és $5/550\ a_n$, (2)-ből következik, hogy $5\nmid b_{n+2}$ akkor és csak akkor igaz, ha $5\nmid b_n$. Mivel azonban $5\nmid b_1$ és $5\nmid b_2$, ezért teljes indukció alkalmazásával következik állításunk.

Balog Antal (Budapest, Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.)