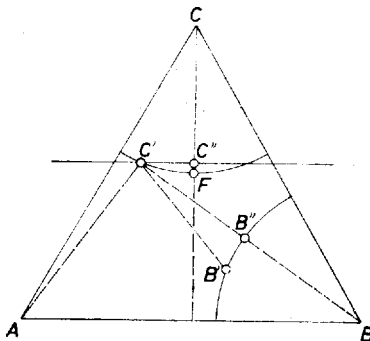
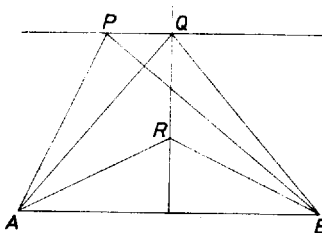


A magasság felét válasszuk egységnek  $\left( \text{ekkor a háromszög oldala } \frac{4}{\sqrt{3}} \right)$ . Ahhoz, hogy a  $B$  és  $C$  pontot ellenőrizzük, el kell jutnunk a  $B$  és  $C$  körüli, 1 sugarú körvonal valamely  $B'$ , ill.  $C'$  pontjába. Feltéhető, hogy a katona a  $C'$  pontot érinti előbb, és így azt kell vizsgálnunk, hogy  $\overline{AC'} + \overline{C'B'}$  miképp minimális.



Rögzített  $C'$  esetén  $\overline{C'B'}$  akkor legkisebb, ha  $B'$  a  $C'B$  szakasz és a  $B$  körüli körvonal  $B''$  metszéspontjába esik, hiszen egyébként  $\overline{C'B'} + \overline{B'B} > \overline{C'B} = \overline{C'B''} + \overline{B''B}$  és  $\overline{B'B} = 1 = \overline{B''B}$ . Feltehetjük tehát, hogy  $C'$ -től a katona a  $C'B$  szakaszon halad tovább. Ha útját a  $B$  pontig folytatná, akkor  $C'$  helyétől függetlenül mindig egységnivel több utat tenne meg, azaz felhasználva, hogy  $\overline{AC'} + \overline{C'B''}$  ugyanakkor minimális, mint  $\overline{AC'} + (\overline{C'B''} + 1) = \overline{AC'} + \overline{C'B'}$ , azt kell eldöntenünk, hogy az  $A$ -ból  $B$ -be vezető és a  $C$  körüli kör egy pontját tartalmazó utak közül melyik a legrövidebb. Ehhez jegyezzük meg, hogy ha  $A$ -ból  $B$ -be úgy akarunk a legrövidebb úton menni, hogy közben egy  $\overline{AB}$ -vel párhuzamos  $e$  egyenes valamely  $P$  pontját is érintjük, akkor  $P$ -nek az  $e$  egyenes és  $\overline{AB}$  felező merőlegesének  $Q$  metszéspontját kell választani (közismert megoldás:  $B$ -t  $e$ -re tükrözzük és  $A$ -t e tükörponttal összekötjük).



Másrészt, a felezőmerőlegesen mozgó  $R$  pontok esetén  $\overline{AR} + \overline{RB}$  annál kisebb, minél közelebb van  $R$  az  $AB$  szakaszhoz. Ezek után a  $C', C'', F$  pontok helyzetét figyelve világos, hogy minimális hosszúságú utat akkor kapunk, ha a katona  $A$ -tól az  $F$  felezőpontba megy, majd onnan útját  $\overline{FB}$  mentén folytatja (2. ábra).

3. ábra

Az  $AB$  szakasz  $T$  felezőpontját vetítsük merőlegesen  $BC$ -re és  $CA$ -ra, így kapjuk a  $Q$  és  $P$  pontot. Az  $F$  körüli egységyi sugarú kör  $Q$ -n és  $P$ -n megy át (Thalész-tétel), így lefedi a  $TQCP$  négyszöget. Mivel  $\overline{FB'} = \overline{FB} - 1 = \sqrt{\frac{7}{3}} - 1 < 1$ ,  $B'$  a  $QFT$   $60^\circ$ -os körcikk belsejében van ( $TQF$  szabályos háromszög, hiszen  $\angle CTQ = 60^\circ$ ). Emiatt  $\overline{B'T} < 1$  és  $\overline{B'Q} < 1$ , és mivel  $B'B = 1$ , a  $B'$  körüli kör lefedi a  $TBQ$  háromszöget. Hasonlóan,  $B'$  tükörképe  $A'$  körül egységyi sugarú kört húzva ez a kör lefedi az  $ATP$  háromszöget. Tehát már az  $A'$ ,  $F$ ,  $B'$  pontok körüli körök lefedik a háromszöget, és ezzel az állítást bebizonyítottuk.