

$$(1) \quad x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

I. megoldás. Ha $a = a_0$ és $b = b_0$ olyan valós számok, amelyekre (1)-nek van egy x_0 valós gyöke, akkor $a = -a_0$, $b = b_0$ számok is olyanok, hiszen ekkor (1)-nek $-x_0$ is gyöke lesz. Mivel a vizsgálandó $a^2 + b^2$ kifejezés értéke e két számpárra ugyanaz, feltehetjük, hogy

$$(2) \quad a \geq 0.$$

(1) bal oldalának értéke $x = 0$ mellett nem 0, tehát (1) gyökei 0-tól különbözőek, és gyökei az (1)-gyel ekvivalens

$$(3) \quad \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + a \left(x + \frac{1}{x}\right) + b - 2 = 0$$

egyenletnek is. Ennek viszont akkor és csakis akkor van valós gyöke, ha az

$$(4) \quad y^2 + ay + b - 2 = 0$$

$$(5) \quad x + \frac{1}{x} = y$$

egyenletekből álló rendszernek van valós gyöke.

Rögzített y mellett (5) x -re másodfokú egyenlet, amelynek akkor és csakis akkor van valós gyöke, ha $|y| \geq 2$. Emiatt (3)-nak akkor és csakis akkor van valós gyöke, ha (4)-nek van 2-nél nem kisebb abszolút értékű valós gyöke.

(4) gyökeinek számtani közepe $-\frac{a}{2} < 0$, tehát közülük a nagyobb abszolút értékű a kisebbik. Eszerint a keresett feltétel

$$\frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b + 8}}{2} \leq -2,$$

ami ekvivalens a

$$4 - a \leq \sqrt{a^2 - 4b + 8}$$

feltétellel. Ha $a \geq 4$, akkor ez nyilván teljesül (feltéve, hogy a jobb oldali gyöknek van értelme), mert a bal oldalon nem pozitív, a jobb oldalon nem negatív szám áll. Az $a \geq 4$ eset azonban a minimumhely keresése szempontjából kizárható, mert ekkor $a^2 + b^2 \geq a^2 \geq 16$, és például $a = 2$, $b = 2$ esetén $x = -1$ megoldása (1)-nek, és ekkor $a^2 + b^2 = 4 + 4 = 8 < 16$. Feltehetjük tehát, hogy $a < 4$, ekkor $4 - a > 0$, és így most feltételünk ekvivalens a

$$(6) \quad (4 - a)^2 \leq a^2 - 4b + 8$$

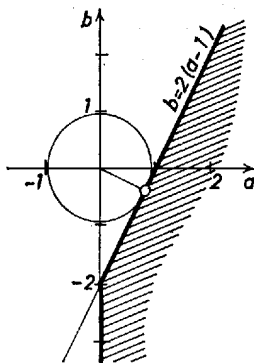
feltétellel. (Ebből az alakból látható, hogy feltételünk azt is biztosítja, hogy (3)-nak legyen valós gyöke.) (6)-ból a

$$(7) \quad b \leq 2(a - 1)$$

feltételt kapjuk. Azt kell tehát meghatároznunk, hogy a (2) és (7) egyenlőtlenségeknek eleget tevő (a, b) számpárok közül $a^2 + b^2$ értéke melyikre minimális. Egyenlőtlenségeink az (a, b) koordináta-rendszerben egy-egy félsíkot határoznak meg, $(a^2 + b^2)$ pedig az (a, b) pontra nézve az origótól mért távolságnak a négyzete. Tehát a (2)–(7) tartománynak az origóhoz legközelebbi pontját keressük: ez az origónak a

$$b = 2(a - 1)$$

egyenesen levő vetülete. A vetület koordinátái $a = \frac{4}{5}$, $b = -\frac{2}{5}$, tehát $a^2 + b^2$ minimuma $\frac{4}{5}$.



II. megoldás. Az I. megoldásban láttuk, hogy azokat az (a, b) számpárokat kell vizsgálnunk, amelyekre (4)-nek van 2-nél nem kisebb abszolút értékű valós gyöke. Jelöljük ezt a gyököt u -val: $|u| \geq 2$, és jelöljük (4) másik valós gyökét v -vel. A gyökök és együtthatók összefüggése szerint

$$a = -u - v, \quad b - 2 = uv,$$

tehát

$$a^2 + b^2 = (u + v)^2 + (uv + 2)^2 = (u^2 + 1) \left(v + \frac{3u}{u^2 + 1} \right)^2 + u^2 + 4 - \frac{9u^2}{(u^2 + 1)}.$$

Rögzített u mellett ez akkor minimális, ha az első tag 0, ekkor

$$a^2 + b^2 = (u^2 + 1) + \frac{9}{u^2 + 1} - 6.$$

Ennek keressük a minimumát az $u^2 \geq 4$ feltétel mellett. Megmutatjuk, hogy az

$$f(t) = t + \frac{9}{t} - 6$$

függvény monoton nő a $t \geq 5$ szakaszon. Emiatt $f(t)$ a minimumát $t = 5$ mellett veszi fel, és az $f(5) = \frac{4}{5}$ érték egyben $a^2 + b^2$ minimuma is a vizsgált feltétel mellett. Az $f(t)$ függvény deriváltja

$$f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2}$$

valóban pozitív $t \geq 5$ mellett. Feladatunk megoldását ezzel befejeztük.