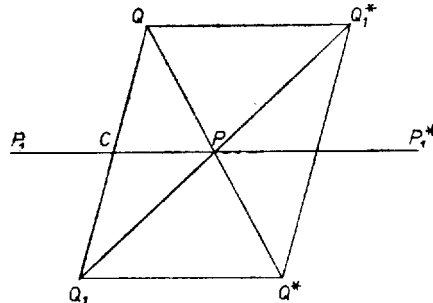


Jelöljük valamely H ponthalmaz különböző pontpárjai által meghatározott egyenesek halmazát $E(H)$ -val. Ha egy H ponthalmaz centrálszimmetrikus C centrummal, akkor minden C -n át nem menő, $E(H)$ -beli e egyeneshez található tőle különböző, vele párhuzamos, $E(H)$ -beli egyenes, ilyen például e -nek C -re vonatkozó tükröképe (ami nyilván $E(H)$ -beli). Gondot csak a C -n átmenő egyenesek okozhatnak. Ha H nem csak ugyanazon az egyenesen levő pontokat tartalmaz, ezen a következő módszerrel segíthetünk. Vegyük H tetszőleges C -től különböző P pontját (itt, és a továbbiakban közömbös lesz, hogy C H -hoz tartozik-e vagy sem), és tükrözzük H -t P -re. A H halmaz P -re vonatkozó H^* tükröképéből és H -ból álló H_P halmazban már a P centrumon átmenő egyenesek sem okoznak gondot.

Valóban, legyen Q tetszőleges pontja H -nak, amelyik nincs a PC egyenesen. A PQ egyenessel párhuzamos, tőle különböző egyenest már $E(H)$ -ban találtunk: ez a P , Q pontok C -re vonatkozó P_1 , Q_1 tükröképén átmenő egyenes. (Hasonló a helyzet, ha Q -t H^* -ból választjuk, ekkor már $E(H^*)$ -ban van PQ -val párhuzamos, tőle különböző egyenes.) Azt kell még belátnunk, hogy a PC egyeneshez található $E(H_P)$ -ben vele párhuzamos, tőle különböző egyenes. Ilyen egyenest kapunk tetszőleges nem PC -n levő H -beli Q -ból kiindulva: ha ismét Q_1 jelöli Q -nak C -re vonatkozó tükröképét, és Q^* a P -re vonatkozót, a Q_1Q^* egyenes párhuzamos PC -vel, és nem azonos vele.



A feladatban feltett kérdésre tehát igenlő a válasz: ilyet kapunk például, ha tetszőleges térbeli (nem egy síkban levő) centrálszimmetrikus H halmazt tükrözzünk valamelyik, centrumától különböző pontjára, és vesszük az eredeti, és a tükrözésből származó pontok egyesítését.

Kiss Emil (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Legyenek $P_1, P_2, \dots, P_k, C$ tetszőleges térbeli (nem egy síkban levő) pontok ($k \geq 3$), jelöljük P_i C -re vonatkozó tükröképét P_{i+k} -val ($i = 1, 2, \dots, k$) és P_i -nek P_{2k} -ra vonatkozó tükröképét P_i^* -gal ($i = 1, 2, \dots, 2k - 1$). Akkor az $M = \{P_i, P_i^*\}$, ($i = 1, 2, \dots, 2k - 1$) ponthalmaznak megvan a feladatban mondott tulajdonsága. A kapott M pontrendszerhez $4k - 2$ pont tartozik, ennek legkisebb értéke 10. Megfelelő pontrendszert kapunk, ha M -hez hozzávesszük P_{2k} -t, vagy C -t és C -nek P_{2k} -ra vonatkozó tükröképét, vagy akár mindhárom pontot. Ennek megfelelően $4k - 1$, $4k$, és $4k + 1$ elemű ponthalmazt kapunk, tehát minden $n \geq 10$ természetes számhoz található n -elemű megfelelő ponthalmaz.

2. Ha H_1 és H_2 , megfelelő centrálszimmetrikus halmazok közös C centrummal, akkor a halmazok egyesítéséből álló H halmaz is megfelelő (ennek belátását az olvasóra hagyjuk). Könnyen látható, hogy tetszőleges $k \geq 3$ mellett a $2k$ csúcsú szabályos sokszög csúcsainak a halmaza megfelelő (csak éppen nem térbeli) Ha tehát a térben különböző, egy ponton átmenő síkokban olyan páros csúcsú szabályos sokszögeket veszünk fel, amelyek centruma a síkok közös pontja, ezek csúcsainak az egyesítése már a feladat összes követelményét kielégíti. Így származtatható például a kocka élfelezőpontjainak a halmaza, tehát ez a halmaz is megfelelő.

3. Érdekes kérdéseknek látszanak a következők. Van-e 10-nél kevesebb pontból álló megfelelő halmaz? Igaz-e, hogy minden megfelelő halmaz centrálszimmetrikus? Származtathatjuk-e az összes megfelelő halmazt a fenti módszerek kombinálásával?