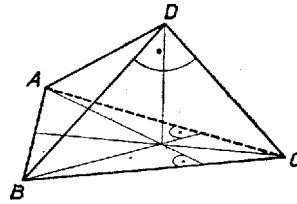


Az 1694. feladatban bebizonyítottuk,<sup>1</sup> hogy ha egy tetraéder egyik csúcsának a szemben levő lap síkján levő merőleges vetülete egybeesik annak a lapháromszögnek a magasságpontjával, akkor ez a tulajdonsága a tetraéder mindegyik csúcsának megvan.



Mostani feladatunk második feltevése szerint a  $D$  csúcsnak megvan a mondott tulajdonsága, ezért az  $A$  csúcsnak is; tehát  $A$  merőleges vetülete a  $BCD$  lap  $S$  síkján a  $D$  csúcs, hiszen az első föltevés szerint a  $BCD$  lap  $D$ -nél derékszögű háromszög, és így magasságpontja maga  $D$ . Ezek szerint  $AD$  merőleges  $S$ -re, és így ennek  $DB$ ,  $DC$  egyenesére is, tehát az  $ADB$  és az  $ADC$  háromszög is derékszögű, a tetraéder  $D$ -ből induló élei páronként merőlegesek egymásra.

Tetraéderünk származtatható egy téglatestből, elmetszve ezt a  $D$  csúcsában összefutó 3 él  $A$ ,  $B$ ,  $C$  végpontjaival meghatározott síkkal.

Alakítsuk az állítás jobb és bal oldalának  $K$  különbségét így:

$$\begin{aligned} K &= 3(AD^2 + BD^2) + 3(BD^2 + CD^2) + 3(AD^2 + CD^2) - (AB + BC + CA)^2 = \\ &= 3(AB^2 + BC^2 + CA^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) - 2(AB \cdot BC + BC \cdot CA + \\ (2) \quad &\quad + CA \cdot AB) = (AB - BC)^2 + (BC - CA)^2 + (CA - AB)^2. \end{aligned}$$

(Az első alak kéttagú kifejezéseit Pitagorasz tétele alapján helyettesítettük a megfelelő átfogó négyzetével, az utolsó alak tagjait pedig alkalmas csoportosítás alapján írtuk fel.)

(2) szerint  $K$  nem lehet negatív, tehát az állítás helyes. (1)-ben akkor és csak akkor érvényes az egyenlőségi jel, ha  $K = 0$ , azaz (2) mindhárom tagja külön is 0, vagyis ha  $AB = BC = CA$ , a tetraéder  $ABC$  lapja szabályos háromszög, többi 3 lapja egybevágó egyenlő szárú derékszögű háromszög. A fent említett származtatás szerint kockából kiindulva kapunk ilyen tetraédert.

*Engedi Antal* (Makó, József A. Gimn. IV. o. t. )

<sup>1</sup>K. M. L. 41 (1970) 118. o.