

I. megoldás. A $b_n \geq 0$ állítás nyilvánvaló, hiszen (1) alapján (2)-nek egyetlen tagja sem negatív. Másrészt (2) tagjai így alakíthatók:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}} &= \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k \sqrt{a_k}} = \frac{(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k-1}})(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{a_k \sqrt{a_k}} \leq \\ &\leq \frac{2\sqrt{a_k}(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{a_k \sqrt{a_k}} = \frac{2(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{a_k} \leq \frac{2(\sqrt{a_k} - \sqrt{a_{k-1}})}{\sqrt{a_k} \cdot \sqrt{a_{k-1}}} = \frac{2}{\sqrt{a_{k-1}}} = \frac{2}{\sqrt{a_k}}, \end{aligned}$$

ezért a $k = 1, 2, \dots, n$ összegezés közbülső tagjainak 2-2 hányadosa az előtte, ill. utána álló tag egyik hányadosával együtt 0-t ad, és csak az első és utolsó tag egyik-egyik hányadosa marad meg:

$$b_n \leq \frac{2}{\sqrt{a_0}} - \frac{2}{\sqrt{a_n}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}}.$$

A jobb oldal kisebb, mint 2, tehát $b_n < 2$, az I. állítást bebizonyítottuk.

II. A $0 \leq c < 2$ feltételt teljesítő, adott c számhoz egy alkalmas $q (> 1)$ hányadosú $a_0 = 1, a_1 = q, \dots, a_n = q^n, \dots$ mértani sorozatot fogunk megadni. Ekkor b_n egy (másik) mértani sorozat összege:

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{q^{k-1}}{q^k}\right) \frac{1}{\sqrt{q^k}} = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{q}\right) \frac{1}{\sqrt{q}} \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{q}}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{q}}\right) \frac{1}{\sqrt{q}} \left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\right\} = \left(\frac{1}{\sqrt{q}} + \frac{1}{q}\right) \left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\right\}, \end{aligned}$$

tehát a b_n értékeket kizárólag q és n határozzák meg.

Mármost c -hez megválasztható q úgy, hogy az első tényezőre teljesüljön

$$\frac{1}{\sqrt{q}} + \frac{1}{q} = Q > c.$$

Ez $c = 0$ esetén minden $q > 1$ számra teljesül, ezért tovább csak a $0 < c < 2$ értékeket tekintjük. Így pedig elegendő, hogy

$$1 < q < \frac{2}{c}$$

legyen, hiszen akkor $1 > 1/q > 0$ és $1/\sqrt{q} > 1/q$, tehát

$$Q = \frac{1}{\sqrt{q}} + \frac{1}{q} > \frac{2}{q} > c, \quad \text{és} \quad \frac{c}{Q} < 1.$$

Ennek alapján megmutatjuk, hogy q ilyen megválasztásával a

$$b_n = Q \left\{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n\right\} > c,$$

valazis az

$$1 > 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n > \frac{c}{Q} \quad (> 0)$$

egyenlőtlenség teljesül minden olyan n -re, amely nagyobb egy bizonyos N -nél. Ez, mivel ilyen n index végtelen sok van, a II. állítás bizonyítását fogja jelenteni.

Valóban, a feltevés folytán az $r_n = (1/\sqrt{q})^n$ sorozat monoton csökkenve 0-hoz tart, ha n minden határon túl nő, ezért van olyan N szám, hogy

$$0 < \left(\frac{1}{\sqrt{q}}\right)^n < 1 - \frac{c}{Q},$$

azaz hogy $(1/\sqrt{q})^n$ a $\left(0, 1 - \frac{c}{Q}\right)$ intervallumba esik minden $n > N$ szám esetében. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Göndöcs Ferenc, Füredi Zoltán, Komjáth Péter

II. megoldás. I. A következő alakítás szerint:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}} = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) \cdot \frac{1}{a_k^{3/2}},$$

tehát a következő integrál egy közelítő összege áll előttünk:

$$\int_{a_0}^{a_n} \frac{1}{x^{3/2}} dx = \int_1^{a_n} x^{-3/2} dx,$$

hiszen az $a_1, a_2, \dots, a_n$ pontok (1) alapján az (a_0, a_n) intervallum $(a_n \geq a_0)$ egy felosztását adják – megengedve 0 hosszúságú részintervallumokat is. Az $x^{-3/2}$ függvény $x > 0$ esetén folytonos és pozitív, tehát az integrál létezik és pozitív. A függvény monoton fogyó, és minden egyes részintervallum hosszát a jobb végpontjában fölvetett függvényértékkel szoroztuk, ezért b_n alsó közelítő összege az integrálnak. És mivel az integrál értéke

$$I = \int_1^{a_n} x^{-3/2} dx = \left[\frac{x^{-1/2}}{-1/2} \right]_1^{a_n} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - 1 \right) = 2 - \frac{2}{\sqrt{a_n}} < 2,$$

azért $0 < b_n \leq I < 2$, amint a feladat állítja.

II. A fenti integrálnak ugyanazon felosztáshoz tartozó felső közelítő összege nagyobb az integrál értékénél:

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}^{3/2}} > \int_1^{a_n} \frac{dx}{x^{3/2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right),$$

de ha az a_{k-1}/a_k hányadosok sorozata alulról korlátos, azaz ha van olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$(3) \quad 1 \geq \frac{a_{k-1}}{a_k} > \delta > 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

akkor B_n nem lényegesen nagyobb b_n nél:

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1}^{3/2}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right)^{3/2} \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^{3/2}} < \frac{1}{\delta^{3/2}} \sum_{k=1}^n \frac{a_k - a_{k-1}}{a_k^{3/2}} = \frac{b_n}{\delta^{3/2}}.$$

Ha tehát (3) teljesül, akkor

$$(4) \quad b_n > 2\delta^{3/2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} \right).$$

Válasszuk meg d -t úgy, hogy $c < d < 2$ legyen, majd válasszuk meg δ -t úgy, hogy

$$2\delta^{3/2} > d, \quad \text{azaz} \quad \delta > \left(\frac{d}{2} \right)^{2/3} = \delta_0$$

teljesüljön, ahol mivel $d < 2$, azért $\delta_0 < 1$. Így (4) szerint $b_n > c$ akkor mindenesetre teljesül, ha

$$(5) \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{a_n}} > \frac{c}{d}, \quad \text{azaz} \quad a_n > \left(\frac{d}{d-c} \right)^2 = D.$$

Azt kell tehát megmutatnunk, hogy tetszőleges $0 < \delta < 1$ számhoz van olyan a_k sorozat, melyre a feladat feltételein kívül (3) teljesül, és végtelen sok n indexre (5) is teljesül.

Az utóbbi biztosan teljesül, ha a_n az n -nel együtt minden határon túl nő. Ha viszont a (3)-nál többet mondó

$$\sqrt{\delta} > \frac{a_{k-1}}{a_k} > \delta \quad (k = 1, 2, \dots)$$

is teljesül az a_n sorozatra, akkor

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_0} > \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^n,$$

ahol $1/\sqrt{\delta} > 1$ miatt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right)^n = \infty,$$

és ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.