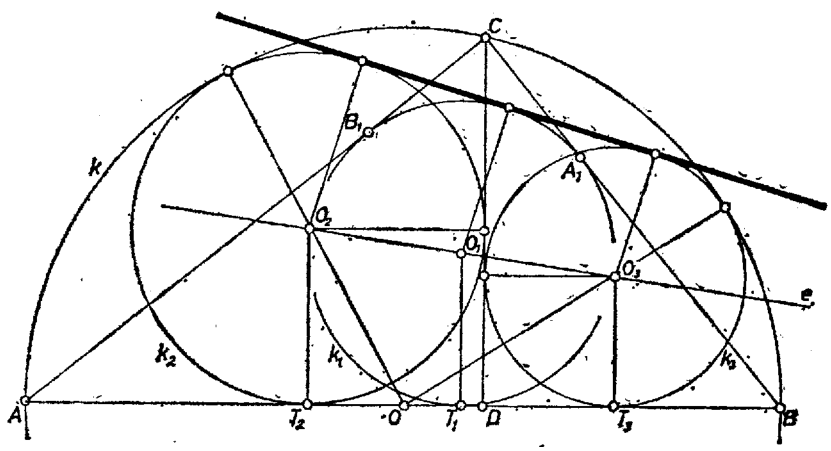
Három körünk második közös érintőjének létezéséhez elég azt belátnunk, hogy középpontjaik egy e egyenesen vannak. Ez az egyenes ugyanis közös szimmetriatengelyük, tehát az AB közös érintőnek e-re vett tükörképe szintén érinti mindhárom kört.

Legyen a k_i kör ($i = 1, 2, 3$) középpontja O_i, sugara r_i, AB-n levő érintési pontja T_i, a k félkör középpontja O, átmérője c. Azt fogjuk bebizonyítani, hogy O_1 az O_2O_3 szakasz felezőpontja, vagyis hogy $O_1T_1 = r_1$ egyenlő az $O_2T_2T_3O_3$ derékszögű trapéz $(O_2T_2+T_3O_3)/2 = (r_2+r_3)/2$ középvonalával, és hogy T_1 felezi a trapéz T_2T_3 magasságát.



Legyen k_2 a CDA derékszögtartományban, ekkor k_3 a CDB-ben van. Feltehetjük, hogy $CB \leq CA$, így D az OB szakaszon, esetleg éppen O-ban van; legyen $OD = d$. Mivel k_2 érinti a CD szakaszt, azért $T_2D = r_2$, a k-val való belső érintkezése alapján pedig $OO_2 = OA - r_2 = c/2 - r_2$. Az OO_2T_2 derékszögű háromszögben $OT_2 = |d - r_2|$, és így

$$(d - r_2)^2 + r_2^2 = \left(\frac{c}{2} - r_2\right)^2,$$

$$r_2^2 - (2d - c)r_2 - \left(\frac{c^2}{4} - d^2\right) = 0.$$

Mivel $d < c/2$, az r_2-t nem tartalmazó tag, az egyenlet két gyökének szorzata negatív, azért a gyökök valósak, egyikük pozitív, másikuk negatív. A pozitív gyökre van csak szükségünk:

$$r_2 = d - \frac{c}{2} + \sqrt{c\left(\frac{c}{2} - d\right)},$$

és itt a gyökjel alatt $AB(OB - OD) = AB \cdot DB = BC^2$ áll, hiszen ABC derékszögű háromszög, ezért

(1)
$$r_2 = d - \frac{c}{2} + BC = BC - BD.$$

Hasonlóan az OO_3T_3 derékszögű háromszögben $OO_3 = c/2 - r_3$, $OT_3 = OD + DT_3 = d + r_3$, Pitagorasz tétele alapján

$$r_3^2 + (2d + c)r_3 - \left(\frac{c^2}{4} - d^2\right) = 0,$$

ennek pozitív gyöke

$$r_3 = -d - \frac{c}{2} + \sqrt{c\left(\frac{c}{2} + d\right)} = -AD + AC,$$

és így az $O_2T_2T_3O_3$ trapéz középvonalának hossza

(2)
$$\frac{r_2 + r_3}{2} = \frac{BC + AC - AB}{2}.$$

Mármost a jobb oldali kifejezés – mint ismeretes – megadja a C-nél derékszögű ABC háromszögbe beírt kör sugarát, ami r_1, eszerint (2) a fenti állítás első részét bizonyítja.

k_1 értelmezéséből az is adódik, hogy – BC-n való érintési pontját A_1-gyel jelölve – fennáll $BT_1 = BA_1 = BC - CA_1 = BC - r_1$.
Így, felhasználva (1)-et, majd (2)-t

$$T_2T_1 = T_2B - T_1B = (r_2 + DB) - (BC - r_1) = r_1 = \frac{r_2 + r_3}{2} = \frac{T_2D + DT_3}{2} = \frac{T_2T_3}{2},$$

ez pedig állításunk második része.

Ezek szerint T_1 felezi a trapéz T_2T_3 szárát, az itt AB-re merőlegesen, vagyis az alapokkal párhuzamosan felmért $r_1 = T_1O_1$ szakasz a trapéz középvonala, tehát O_1 az O_2O_3 száron van. Ezt akartuk bizonyítani.

Hadik Róbert (Makó, József A. Gimn., IV. o. t.)