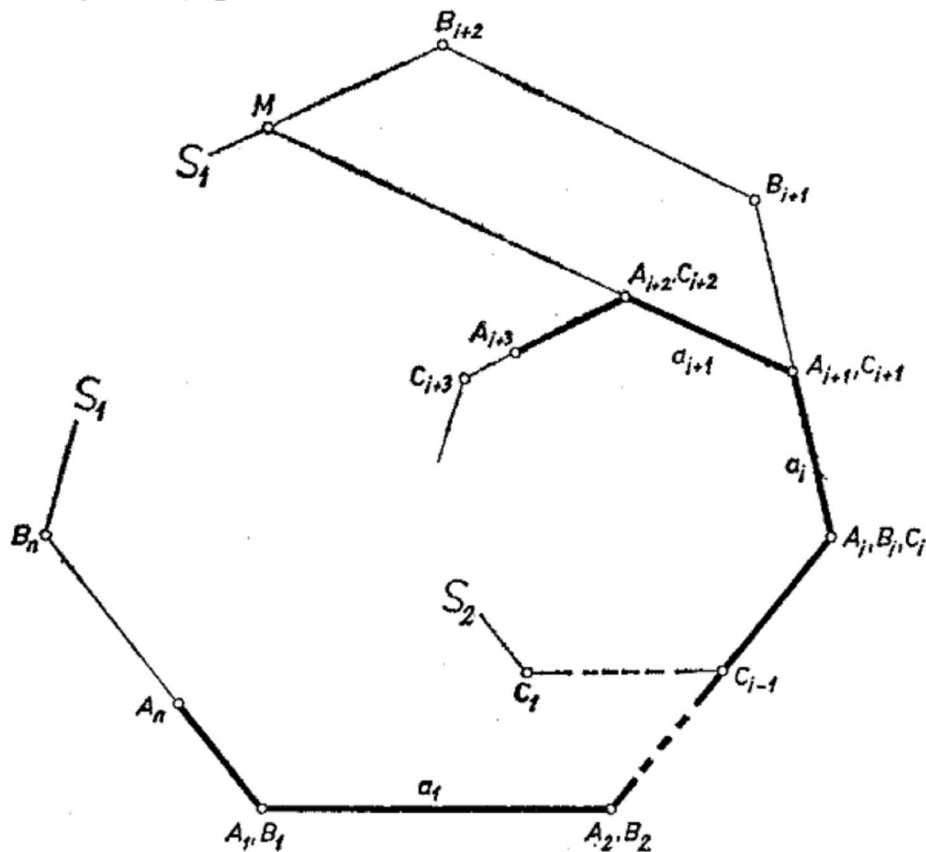


I. megoldás. Ha a kérdéses n -szög szögei egyenlők, akkor egyszersmind egyenlők a szabályos n -szög szögeivel. Ez viszont a bizonyítandó állítással együtt azt fejezi ki, hogy sokszögünk szabályos n -szög.



$n = 3$ esetére ismeretes, hogy ha egy háromszög mindhárom szöge egyenlő (ti. 60°), akkor oldalai is egyenlők, az állítás helyes. Közvetlenül belátható az állítás $n = 4$ esetére is. Ekkor derékszögű négyszögről van szó. Ebben a szemben levő oldalak párhuzamosak és egyenlők: $a_1 = a_3$ és $a_2 = a_4$. (1) szerint viszont a_2 nem nagyobb a_1 -nél, és nem kisebb a_3 -nál, így $a_2 = a_3$, és mind a négy oldal egyenlő.

$n \geq 5$ esetére legyen a kérdéses n -szög $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n = A$, ahol $A_1A_2 = a_1$, $A_2A_3 = a_2, \dots, A_{n-1}A_n = a_{n-1}$, $A_nA_1 = a_n$, továbbá bármelyik két egymás utáni oldal közti szög $(n-2)180^\circ/n$, tompaszög. Megmutatjuk, hogy a (2)-vel ellentétes feltevés ellentmondásra vezet.

Legyen $a_1, a_2, \dots, a_n$ közül a_i az első olyan, amely határozottan kisebb az előtte állónál:

$$a_1 = \dots = a_{i-1} > a_i \geq a_{i+1} \geq \dots a_n \quad (i \geq 2).$$

Tekintsük azt az a_1 oldalú $B_1B_2 \dots B_n = S_1$ szabályos n -szöget, amelynek első két csúcsa azonos A_1 -gyel, ill. A_2 -vel, és amely az A_1A_2 egyenesnek ugyanazon oldalán van, mint A . Ekkor $A_1, A_2, \dots, A_i$ rendre azonos $B_1, B_2, \dots, B_i$ -vel, de A_{i+1} már a B_iB_{i+1} szakasz közbülső pontja; ebből következik az is, hogy $i < n$, mert különben az A_{i+1} szerepét átvevő A_1 nem lehetne azonos B_1 -gyel. A következő $A_{i+1}A_{i+2}$ oldal S_1 belsejében van. Ha ugyanis az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenesnek S_1 területével való, A_{i+1} -től különböző közös pontja M , akkor az A_{i+1} -nél és B_{i+1} -nél levő szögek egyenlősége miatt az $A_{i+1}B_{i+1}B_{i+2}M$ négyszög trapéz, benne – mint láttuk – B_{i+1} -nél és B_{i+2} -nél tompaszög van, ezért

$$A_{i+1}M > B_{i+1}B_{i+2} = a_1 > a_i \geq a_{i+1} = A_{i+1}A_{i+2}.$$

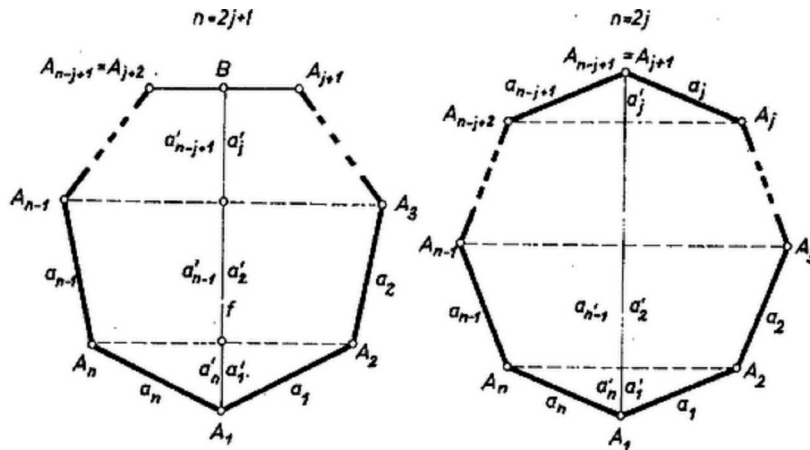
Ebből az is következik, hogy $i < n - 1$, mert ha $i = n - 1$, akkor A_{i+2} -n A_1 -et kellene értenünk, de ez nincs S_1 belsejében.

Ha mármost (1) további részében mindenütt ismét egyenlőség áll: $a_i = a_i + 1 = \dots = a_n$, akkor hasonló megfontolás mutatja, hogy az $A_{i+2}, A_{i+3}, \dots, A_n$ csúcsok azonosak annak az a_i oldalú $C_1 C_2 \dots C_n = S_2$ szabályos n -szögnek $C_{i+2}, C_{i+3}, \dots, C_n$ csúcsaival, amelynek $C_i C_{i+1}$ oldala azonos $A_i A_{i+1}$ -gyel, és amely az $A_i A_{i+1}$ egyenesnek ugyanazon az oldalán van, mint A . S_2 az S_1 -nek $a_i : a_1 (< 1)$ arányú kicsinyítettje, és S_1 -gyel hasonló helyzetű a közös A_i csúcsra, mint középpontra nézve. Ezért C_{i-1}, C_i és C_{i+1} kivételével S_2 minden csúcsa S_1 belsejében van. Az A_n -nel azonos C_n nincs az S_1 kerületén levő 3 csúcs között, mert mint láttuk, $i < n - 1$.

Azt kaptuk tehát, hogy feltevéseink mellett A_n az S_1 -re nézve belső pont. Ez ellentmondásban van azzal, hogy A -nak és S_1 -nek közös csúcsa A_1 , és így A_n a $B_n A_1$ szakaszon van, esetleg ennek B_n végpontjában, mindenesetre S_1 kerületén.

Ha pedig (1)-nek a_i és a_n közötti részében további határozott egyenlőtlenségek állnának fenn, ebből az előbbi eljárás ismétlésével kapnók, hogy A_n belső pontja egy rendre kisebb oldalú $S_3, S_4, \dots$ szabályos n -szögnek, amelyeknek nincs közös csúcsuk S_1 -gyel, és egészen benne vannak S_1 -ben – ez pedig ismét ellentmondás azzal, hogy A_n -nek S_1 kerületén kell lennie, mint fent láttuk. Legfeljebb annyi újabb szabályos n -szöget kellene figyelembe vennünk, ahány helyen (1)-ben határozott egyenlőtlenség áll fenn. – Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Aczél Gábor (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)
dolgozata kiegészítésekkel.



II. megoldás. Továbbra is használva az I. megoldás jelöléseit, az A és S_1 n -szögek oldalai rendre párhuzamosak egymással. Legyen $n = 2j$, ill. $n = 2j + 1$ aszerint, amint n páros vagy páratlan. Legyen az $A_n A_1 A_2$ szög f felezőjén A_{j+1} , merőleges vetülete B . Ha n páratlan, akkor f merőleges az $A_{j+1} A_{j+2}$ oldalra, így $A_1 B$ mindkét esetben egyrészt az $A_1 A_2 \dots A_{j+1}$ törött vonalnak, másrészt az $A_1 A_n A_{n-1} \dots A_{n-j+1}$ törött vonalnak a vetülete f -en, a két vetület különbsége tehát 0. Jelöljük az a_i oldal vetületét f -en a'_i -vel, ekkor tehát

$$(3) \quad (a'_1 - a'_n) + (a'_2 - a'_{n-1}) + \dots + (a'_j - a'_{n-j+1}) = 0.$$

A két sokszög szögeinek egyenlő voltából következik, hogy az $ak = A_k A_{k+1}$ és $a_{n-k+1} = A_{n-k+2} A_{n-k+1}$ oldal ($k = 1, 2, \dots, j$) ugyanakkora, csak ellenkező irányú φ_k szöget zár be f -fel, és a sokszög konvex volta miatt ez a szög hegyes szög, esetleg 0° , ti. ha párhuzamosak. Ezért

$$a'_k - a'_{n-k+1} = (a_k - a'_{n-k+1}) \cos \varphi_k \geq 0,$$

tehát (3) csak úgy teljesülhet, ha mindegyik különbség 0, így többek közt $a'_1 - a'_n = 0$, amiből $a_1 = a_n$ következik. Ezt (1)-gyel összekapcsolva következik (2).

Nagy Péter Tibor (Kiskunhalas, Szilády Á. g. IV. o. t.)
dolgozata, kiegészítéssel.