

Kétszeri négyzetreemeléssel az egyenlet olyan következményét írhatjuk fel, amelyben nem szerepel gyökjel:

$$\begin{aligned}4 \cdot \sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} &= p + 4 - 4x^2, \\16p - 16(p + 1)x^2 &= p^2 + 8p + 16 - 8(p + 4)x^2,\end{aligned}$$

amiből

$$\begin{aligned}(2) \quad 8(2 - p)x^2 &= p^2 - 8p + 16 = (p - 4)^2, \\x^2 &= \frac{(p - 4)^2}{8(2 - p)}.\end{aligned}$$

Eszerint gyök gyanánt csak az

$$x_1 = \frac{p - 4}{\sqrt{8(2 - p)}}, \quad x_2 = \frac{4 - p}{\sqrt{8(2 - p)}}$$

számok jönnek szóba, ha ti. $p \neq 2$. A $p = 2$ esetben (2) ellentmondást fejez ki, ekkor (1)-nek nincs gyöke.

x_1 és x_2 valósak, ha $p < 2$. Ekkor $x_1 < 0$; ez nem lehet gyöke (1)-nek, mert (1) bal oldala nem negatív. x_2 -t (1)-be helyettesítve a két négyzetgyök alatti kifejezés:

$$\begin{aligned}x^2 - p &= \frac{p^2 - 8p + 16}{16 - 8p} - p = \frac{9p^2 - 24p + 16}{8(2 - p)} = \frac{(3p - 4)^2}{8(2 - p)}, \\x^2 - 1 &= \frac{p^2}{8(2 - p)}.\end{aligned}$$

Ha $p < 2$, akkor mindkét kifejezés pozitív. Négyzetgyökök összegének kell x_2 -t adnia ahhoz, hogy x_2 gyöke legyen (1)-nek, vagyis a közös nevezőt mindjárt elhagyva – teljesülnie kell a következő egyenlőségnek

$$|3p - 4| + 2|p| = 4 - p.$$

A bal oldal $p < 0$ esetén

$$-(3p - 4) + 2(-p) = -5p + 4 \neq 4 - p,$$

tehát x_2 nem gyök; $0 \leq p \leq 4/3$ esetén

$$-(3p - 4) + 2p = -p + 4,$$

tehát ebben az intervallumban x_2 kielégíti (1)-et; végül $4/3 < p < 2$ esetén a bal oldal

$$3p - 4 + 2p = 5p - 4,$$

ami ebbe az intervallumba eső értékekre nem egyenlő a jobb oldallal, tehát x_2 ebben az esetben sem gyök.

Mindezek szerint az (1) egyenlet egyetlen valós gyöke $0 \leq p \leq 4/3$ esetén

$$x = \frac{4 - p}{\sqrt{8(2 - p)}},$$

más p értékek esetén nincs valós megoldása:

Surányi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. I. o. t.)

Megjegyzés. Meghatározhatjuk azt az intervallumot, amelybe a gyök esik. Átalakítással

$$x = \frac{4 - p}{\sqrt{8(2 - p)}} = \sqrt{\frac{16 - 8p + p^2}{16 - 8p}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{16 - 8p}},$$

eszerint a p számára megállapított $(0, 4/3)$ intervallumon végighaladva x növekszik, mert a gyök alatt a tört számlálója növekszik, nevezője csökken. $p = 0$ esetén $x = 1$, $p = 4/3$ esetén $x = 2/\sqrt{3} > 1$, tehát a mondott intervallum $(1, 2/\sqrt{3})$.