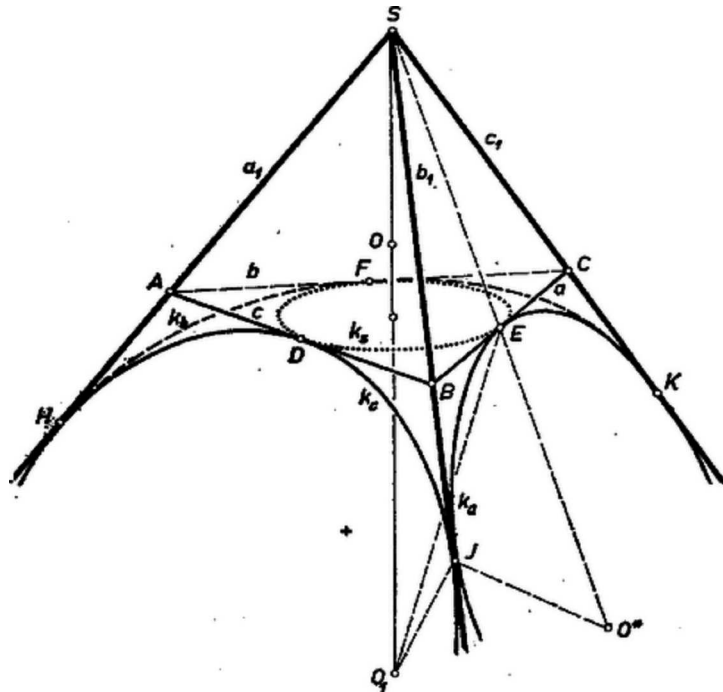


a) Azon, hogy egy t egyenes és egy G gömb érintik egymást a T pontban, azt értjük, hogy t -nek és G -nek egyetlen közös pontja T . Bármely a t -n átmenő S sík G -ből egy k kört metsz ki – kivéve a T -hez tartozó gömsugárra merőleges síkot, G -nek T -beli érintősíkját, amelynek G -vel egyetlen közös pontja T . Minden ilyen k kör és t ugyancsak érintik egymást T -ben. Valóban, T közös pontja t -nek és k -nak, de több közös pontjuk nincs, mert ha volna, ez t -nek és G -nek is közös pontja volna.

Legyen G_1 az $SABC = N$ tetraéder valamennyi élét érintő öt gömb egyike, legyen az érintési pont az AB , BC , CA , SA , SB , ill. SC élen rendre D , E , F , H , J , ill. K , legyen továbbá G_1 -nek az ABC , SAB , SBC , SCA lappal való metszészvonala rendre a k_s , k_c , k_a , ill. k_b kör. Ezek valóban körök – mert pl. k_s átmegy a D , E , F pontokon, ezek pedig nem eshetnek egybe, mert nincs az AB , BC , CA egyeneseknek közös pontjuk. Így a 4 kör rendre érinti az ABC , az SAB , az SBC , ill. az SCA háromszög oldalegyeneseit, és ezért rendre azonos a megfelelő háromszögbe beírt körrel, vagy valamelyik hozzáírt (külső érintő) körrel. Ismeretes, hogy a beírt kör mindegyik oldalegyenest az oldalszakaszon érinti (mind a három érintési pont belső), a 3 hozzáírt kör pedig az oldalegyenesek egyikét az oldalszakaszon érinti, a további kettőt pedig az előbbi szakasz végpontjain túli félegyenesükön (1 belső és 2 külső érintési pont).



1. ábra

Vegyük sorra a körök beírt, ill. hozzáírt voltára lehetséges kombinációkat. Tegyük fel, hogy k_s az ABC háromszögben beírt kör – vagyis D , E , F a megfelelő oldalszakaszon van –, és legyen H az SA szakasz A -n túli meghosszabbításán (1. ábra). Így k_c az SAB háromszög AB oldalához, k_b pedig az SAC háromszög AC oldalához hozzáírt külső érintő kör, ezért J az SB él B -n túli, K pedig az SC -nek C -n túli meghosszabbításán van, tehát k_a ugyancsak hozzáírt kör, vagyis G_1 az N lapjaiból 1 belső és 3 hozzáírt kört metsz ki. – További 3 ilyen gömb (G_2 , G_3 , G_4) úgy adódik, ha rendre k_a -t, k_b -t, k_c -t vesszük beírt körnek, és egy további érintési pontot egy él meghosszabbításán választunk. – Ha pedig k_s ismét beírt kör és H az SA szakasz pontja (2. ábra), akkor k_c és k_b is beírt kör, és így k_a is, ez a G_5 gömb N minden lapjából beírt kört metsz ki. – Nem lehet mind a négy kör hozzáírt kör, mert ha abból indulunk ki, hogy k_a az SBC háromszögnek pl. a BC oldalához hozzáírt köre (1. ábra), akkor E a BC szakaszon van, J és K pedig BC -nek S -sel ellentétes oldalán, ezért k_b már csak az AC oldalhoz, k_c pedig csak az AB -hez hozzáírt kör lehet, viszont F az AC , D az AB szakaszon van, ezért k_s beírt kör. Nincs tehát 5-nél több lehetőség az összes éleket – vagy meghosszabbításukat – érintő gömbre.

Megmutatjuk, hogy ha mind az 5 gömb létezik, akkor N összes élei egyenlők; így N lapjai szabályos háromszögek és N szabályos tetraéder. A körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlősége alapján N egyes csúcsaiba befutó 3 élegyenesen az érintési szakaszokra fennáll:

$$(1) \quad \begin{aligned} SH = SJ = SK, & \quad AD = AF = AH, \\ BD = BE = BJ, & \quad CE = CF = CK. \end{aligned}$$

Ezek alapján bármelyik él hossza kifejezhető más három él hosszával, és a négy él között összefüggést kapunk. G_1 -ből (1. ábra)

$$\begin{aligned} AB &= AD + DB = AF + JB = (AC - CF) + (SJ - SB) = \\ &= AC - SB + (SK - CK) = AC - SB + SC, \end{aligned}$$

tehát

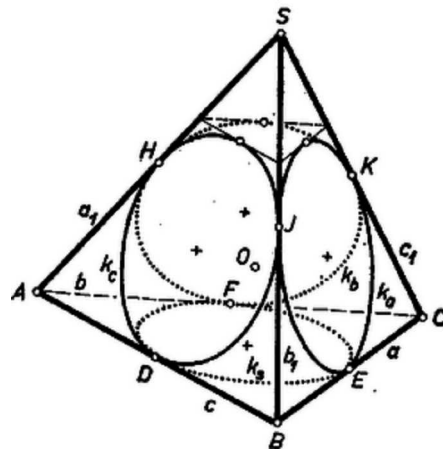
$$(2a) \quad AB - SC = AC - SB,$$

és hasonlóan (AF helyett AH -val, JB helyett EB -vel kezdve)

$$(2b) \quad AB - SC = BC - SA.$$

A (2), (3) egyenlőség-pár G_1 létezésének szükséges feltétele. A beírt kört tartalmazó ABC lapot alaplappnak, N többi lapjait oldallappnak véve ezt kaptuk: *külső érintő gömb létezéséhez szükséges, hogy bármelyik oldalét a szemben fekvő alapélből kivonva ugyanaz a különbség adódjék*. Legyen röviden $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $SA = a_1$, $SB = b_1$, $SC = c_1$, ekkor (2a) és (2b) így alakul:

$$(2) \quad a - a_1 = b - b_1 = c - c_1.$$



2. ábra

Az SBC lapból k_a beírt kört, a többiekből hozzáírt kört kimetsző G_2 gömb esetében az alapélek a , b_1 és c_1 , ezért (2)-ből

$$(3) \quad a - a_1 = b_1 - b = c_1 - c.$$

Ezt (2)-vel egybevetve G_1 és G_2 egyidejű létezésének feltétele $b - b_1 = 0$, vagyis

$$(4) \quad a = a_1, \quad b = b_1, \quad c = c_1.$$

G_3 és G_4 létezését (G_1 és G_2 mellett) feltételezve már nem kapunk újabb feltételeket.

G_5 létezéséből (2. ábra)

$$\begin{aligned} AB &= AD + DB = AF + BJ = AC - CF + SB - JS = \\ &= AC + SB - (CK + KS) = AC + SB - SC, \end{aligned}$$

tehát $AB + SC = AC + SB$, és hasonlóan $AB + SC = BC + SA$, összefoglalva

$$(5) \quad a + a_1 = b + b_1 = c + c_1.$$

(4) és (5) szerint már G_1 , G_2 és G_5 létezéséből következik az összes élek egyenlősége, amit bizonyítani akartunk.

b) Legyen most N egy szabályos tetraéder. A közéje írt gömb O középpontja minden oldalétól egyenlő távol van, mert az SO tengely körül 120° -kal elforgatva N önmagába megy át, és így O és az SO egyenes minden pontja egyenlő távol van az a , b , c élektől, másrészt az a_1 , b_1 , c_1 élektől is. Mivel az AO tengely körüli 120° -os forgás is önmagába viszi át N -et, ezért O az a és b_1 éltől is egyenlő távol van, tehát mind a 6 éltől, a fenti G_5 létezik.

Ha találunk SO -n még egy pontot, amely a -tól és b_1 -től egyenlő távol van, az is egy kívánt gömbnek (szükségképpen egy külső érintő gömbnek) a középpontja. – Az SBC háromszög BC oldalához hozzáírt k_a kör BC -t ennek E felezőpontjában érinti, SB -n levő érintési pontja legyen J , középpontja O^* . O^* az SE egyenesen van, mert SBC egyenlő oldalú háromszög. SE benne van N -nek OSA szimmetriasiskjában, amely merőleges az SBC lapra. Így az O^* -ban SBC -re állított merőleges is benne van az OSA síkban, tehát metszi az SO tengelyt egy O_1 pontban. Erre nézve O_1E és O_1J egyenlők, mert átfogók az O_1O^*E és O_1O^*J derékszögű háromszögekben, amelyekben az O_1O^* befogó közös, és az O^*E , O^*J befogók egyenlők. O_1E adja O_1 -nek a -tól való távolságát, mert BC merőleges az O_1 -et

tartalmazó OSA szimmetriasíkra; O_1J pedig O_1 -nek b_1 -től való távolságát, mert SB a J -ben érinti k_a -t, így az O_1 körül O_1J sugárral írt G_1 gömböt is, amely tartalmazza k_a -t.

O_1 -ből a szabályos tetraéder szimmetriáival az AO , BO , CO tengelyeken kapjuk a további G_2 , G_3 , G_4 érintő gömbök középpontját. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Megjegyzések. 1. A b) részben G_5 létezéséből G_1 létezését így is beláthatjuk: Vegyük a G_5 által az S -ben összefutó lapsíkokból kimetszett körökhöz az AB , BC , CA egyenessel párhuzamos érintőt (2. ábra). Ezek a szimmetria miatt az SA , SB , SC éleket páronként egybeeső pontokban metszik. Ezek és S egy szabályos tetraéder csúcsai, ennek élei érintik G_5 -öt, éspedig 3 az élszakaszon, 3 a meghosszabbításon.

Szidarovszky Ferenc (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

2. Láttuk, hogy G_1 , G_2 és G_5 létezése – vagyis két külső és egy belső érintő gömb – már biztosítja, hogy N csak szabályos lehet. Kérdezhetjük: elég-e három külső érintő gömb létezése a szabályosság biztosításához, lehet-e szűkíteni a feltevést?

Könnyű belátni, hogy nem lehet. k_b -t beírt körnek, a többi hármat hozzáírt körnek véve (2)-ből a feltétel $a_1 - a = b - b_1 = c_1 - c$ és ez (4) miatt teljesül, ekkor létezik G_3 is. (4) viszont akkor is teljesül, ha a , b , c egy nem szabályos háromszög oldalai, és a szemben fekvő oldalélek hossza rendre ugyancsak a , b , c . Ilyen tetraéderben létezik 4 külső érintő gömb, ellenben nem létezik belső érintő gömb, mert (5) nem teljesül. (A mondott tulajdonságú tetraéder létezik, ha a , b , c hegyesszögű háromszöget határoznak meg. Ezt a több érdekes tulajdonsággal bíró négylapot a kristálytanban *szfenoídnak* nevezik.)

3. Hasonlóan nyerjük (2) és (5) egybevetéséből, hogy egy belső és egy külső érintő gömb létezése esetén a tetraéder szabályos háromoldalú gúla: $a = b = c$ és $a_1 = b_1 = c_1$.