

I. megoldás. A bal oldal akkor és csak akkor valós, ha egyik négyzetgyökjel alatt sem áll negatív szám:

$$(2) \quad x + 1 \geq 0 \quad \text{és} \quad 3 - x \geq 0, \quad \text{tehát} \quad -1 \leq x \leq 3.$$

Az egyenlőtlenséget

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}$$

alakban írva a (2) alatti x -ekre egyik oldal sem negatív, ez az egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, amikor (1) is fennáll. Ezért a -1 és 3 közti x -ekre a négyzetre emeléssel és rendezéssel adódó

$$(3) \quad \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk. Itt a bal oldal nem lehet negatív. Ez újabb korlátozást ad x -re:

$$(4) \quad x < \frac{7}{8}.$$

Ezen x -ekre szorítkozva (3) újabb négyzetre emelésével, majd rendezéssel és gyöktényezőkre bontással

$$4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0,$$

$$4 \left(x - \frac{8 + \sqrt{31}}{8} \right) \left(x - \frac{8 - \sqrt{31}}{8} \right) > 0.$$

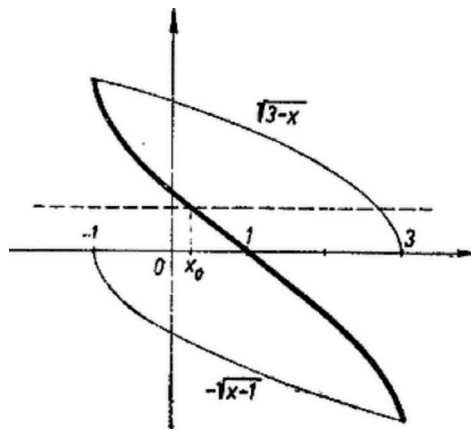
Ez akkor és csak akkor teljesül, ha mindkét különbség pozitív, vagy ha mindkettő negatív:

$$x > 1 + \frac{\sqrt{31}}{8}, \quad \text{vagy} \quad x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}.$$

Az első ellentmond (4)-nek, a második pedig (4)-nél erősebb korlátozást ad. Ezt (2)-vel egybevetve a keresett x értékekre

$$-1 \leq x < 1 - \sqrt{31}/8.$$

Hegedűs Csaba (Nagykanizsa, Landler J. g. III. o. t.)



II. megoldás. A $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}$ függvény a $-1 \leq x \leq 3$ intervallumban bír értelemmel. A függvény x növekedésével csökken. Ugyanis nagyobb számnak a négyzetgyöke is nagyobb, kisebbé kisebb, így ha x növekszik, $3-x$ és vele együtt $\sqrt{3-x}$ is csökken, $x+1$ és $\sqrt{x+1}$ növekszik, tehát $-\sqrt{x+1}$ csökken, ennél fogva

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} + (-\sqrt{x+1})$$

függvény mindkét összeadandója, s ezért az összeg is csökken.

A -1 helyen a függvény értéke 2, nagyobb $1/2$ -nél, így a feladat kérdésére válaszolhatunk úgy, hogy meghatározzuk azt az x_0 számot, amelyre a függvény az $1/2$ értéket veszi fel. Ekkor (1) azokra az értékekre teljesül, amelyekre $-1 \leq x < x_0$. A

$$(5) \quad \sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{2}$$

egyenletből kétszeri négyzetre emeléssel és rendezésekkel sorra

$$4 - 2\sqrt{(3-x)(x+1)} = \frac{1}{4}, \quad 225 = 64(3 + 2x - x^2) \\ 64x^2 - 128x + 33 = 0.$$

Az (5) egyenletet csak ennek az egyenletnek a gyökei, vagyis az $1 + \sqrt{31}/8$ és $1 - \sqrt{31}/8$ értékek elégíthetik ki. Az előbbire (5) bal oldala negatív, hiszen az $x = 1$ helyen 0, és láttuk, hogy növekedő x -szel csökken. Az utóbbi helyen

$$\sqrt{3 - \left(1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right)} = \frac{\sqrt{32 + 2\sqrt{31}}}{4} = \frac{\sqrt{31 + 2\sqrt{31} + 1}}{4} = \frac{\sqrt{31} + 1}{4}, \text{ és} \\ \sqrt{\left(1 - \frac{\sqrt{31}}{8}\right) + 1} = \frac{\sqrt{31 - 2\sqrt{31} + 1}}{4} = \frac{\sqrt{31} - 1}{4}.$$

Így az (5) egyenlet csak az $x_0 = 1 - \frac{\sqrt{31}}{8}$ értékre teljesülhet és arra teljesül is. A feladatban szereplő egyenlőtlenség tehát teljesül azokra az x -ekre, amelyekre

$$-1 \leq x < 1 - \frac{\sqrt{31}}{8},$$

és más értékekre nem.

Horváth József (Esztergom, Temesvári Pelbárt g. III. o. t.)