

I. megoldás. Legyen a kúp alapsugara R , magassága m , a gömb sugara r . Így a kúp alkotója $\sqrt{R^2 + m^2}$, a henger sugara r , magassága $2r$. A kúp tengelymetszete egyenlő szárú háromszög, és a gömbből így kimetszett főkör a háromszög beírt köre, tehát a szokásos jelölésekkel

$$r = \frac{t}{s} = \frac{Rm}{R + \sqrt{R^2 + m^2}}, \text{ innen } r\sqrt{R^2 + m^2} = R(m - r) \text{ és } R^2 = \frac{r^2 m}{m - 2r}.$$

Így a kérdéses térfogatok k aránya:

$$\underline{k} = V_1 : V_2 = \frac{\pi}{3} R^2 m : 2\pi r^3 = \frac{r^2 m^2}{3(m - 2r)} : 2r^3 = \frac{m^2}{6mr - 12r^2}.$$

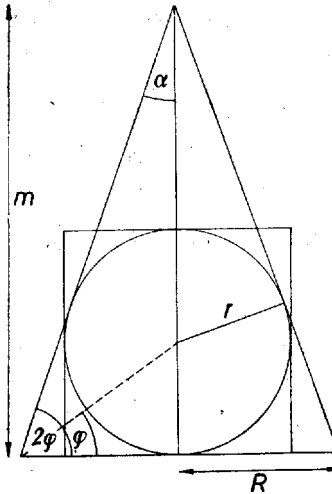
Az aláhúzott részt r -re vonatkozó egyenletnek tekintve és megoldva:

$$(1) \quad 12kr^2 - 6kmr + m^2 = 0, \quad r = \frac{m}{12k} \left[3k \pm \sqrt{3k(3k - 4)} \right].$$

Mivel k nyilván pozitív, azért valós megoldás csak $3k - 4 \geq 0$, azaz $k \geq 4/3$ esetén van. Tehát $k = 1$ lehetetlen, $V_1 \neq V_2$. Ezt kellett bizonyítanunk.

A $k_{\min} = 4/3$ esetben (1)-ből $r = m/4$, tehát a kúp csúcsának a gömb középpontjától való távolsága $m - r = 3r$. A kívánt szöget úgy kapjuk, hogy egy tetszés szerinti r sugarú körhöz egy a középponttól $3r$ -nyire levő pontból meghúzzuk az érintőket és szögüket megfelezzük.

Békési Gábor (Ócsa, Bolyai J. g. IV. o. t.)



II. megoldás. Legyen az alkotók hajlásszöge az alaphoz 2φ . Ekkor $m = R \operatorname{tg} 2\varphi$, $r = R \operatorname{tg} \varphi$, és így

$$k = \frac{\pi}{3} R^3 \operatorname{tg} 2\varphi : 2\pi R^3 \operatorname{tg}^3 \varphi = \frac{\operatorname{tg} 2\varphi}{6 \operatorname{tg}^3 \varphi} = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{6(1 - \operatorname{tg}^2 \varphi) \operatorname{tg}^3 \varphi} = \frac{1}{3 \operatorname{tg}^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)}.$$

k -ra akkor kapunk legkisebb értéket, ha itt a nevezőbeli $\operatorname{tg}^2 \varphi (1 - \operatorname{tg}^2 \varphi)$ szorzat a legnagyobb. Mivel $2\varphi < 90^\circ$, $\varphi < 45^\circ$, azért a második tényező is pozitív. A tényezők összege állandó: 1, tehát a pozitív számok számtani és mértani közepének nagyságviszonyára ismert tétel szerint a szorzat a tényezők egyenlősége esetén a legnagyobb. $\operatorname{tg}^2 \varphi = 1 - \operatorname{tg}^2 \varphi$ -ből $\operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{2}$, $\operatorname{tg} 2\varphi = 4/\sqrt{2}$, innen a keresett α félnyílásszögre $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{1/8}$, $\sin \alpha = 1/3$, α bármelyikből egyszerűen szerkeszthető.

Goldperger Katalin (Balassagyarmat, II. sz. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A gömböt (és vele a hengert is) állandónak véve legyen $r = 1$, ekkor $\operatorname{tg} \varphi = 1/R$, $m = R \operatorname{tg} 2\varphi = 2R^2/(R^2 - 1)$, és így

$$V_1 = \frac{2\pi R^4}{3(R^2 - 1)}, \text{ amiből } R^2 = \frac{1}{4\pi} \left[3V_1 \pm \sqrt{3V_1(3V_1 - 8\pi)} \right],$$

tehát $V_1 \geq 8\pi/3$, $V_{\min} = 8\pi/3$. Másrészt $V_2 = 2\pi$, tehát $k_{\min} = \frac{4}{3}$.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

2. A gömb térfogata $V = 2V_2/3$, azért a $V_1/V = 3k/2$ arány legkisebb értéke 2. Eszerint a kúpba írt gömb térfogata legfeljebb fele lehet a kúp térfogatának. A fenti szerkesztéssel éppen a maximumot adó félnyílásszöget adtuk meg.