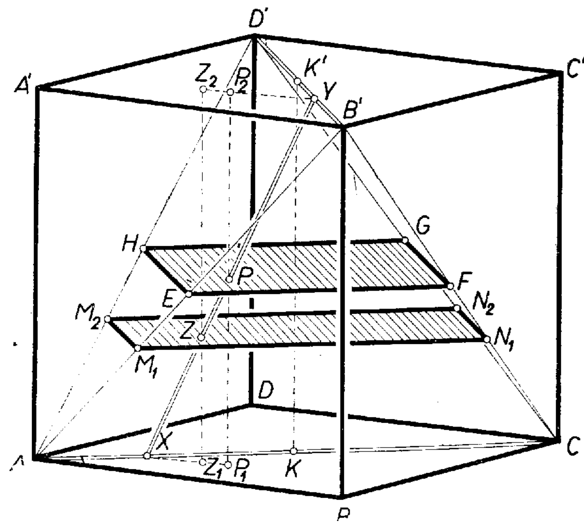
*a)* Legyen az $XY$ szakasz $P$ felezőpontjának az $ABCD = L$, ill. a vele párhuzamos $A'B'C'D' = L'$ lapon levő vetülete $P_1$, ill. $P_2$.




A $PP_1X$ és $PP_2Y$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert $P$-nél levő szögeik csúcsszögek, és átfogóik egyenlők, ezért $PP_1 = PP_2$, vagyis $P$ mindig egyenlő távolságra van $L$ és $L'$-től. Ugyanezt jelenti a $PX = PY$ egyenlőség arra az esetre, ha $X$ az $AC$ átló $K$ és $Y$ a $B'D'$ átló $K'$ felezőpontjában van, mert ekkor $XY \equiv KK'$, merőleges $L$-re (ekkor az említett háromszögek elfajulnak). Ezek szerint a keresett mértani hely a kockának az $AA'$ élre merőleges $S$ szimmetriasíkjában van.

Ha $X$-et rögzítjük és $Y$ végigfut $B'D'$-n, akkor $P$ leírja az $XB'D'$ háromszög $B'D'$-vel párhuzamos középvonalát, melynek hossza $B'D'/2$. E szakasz szimmetrikus az $ACC'A'$ síkra és a kocka középpontjától való távolsága $XK/2$. Ha $X$ végighalad $AC$-n, ez a szakasz a saját irányára merőlegesen tolódik el, mert $AC$ merőleges $B'D'$-re; az eltolódás hossza, míg $XA$-tól $K$-ig, majd $C$-ig halad, $AK/2 + KC/2 = AC/2 = B'D'/2$. Tehát a szakasz által leírt idom az $EFGH = Q$ négyzet, ahol $E$ és $H$ az $X \equiv A$, $F$ és $G$ pedig az $X \equiv C$ helyzethez tartozó végpontjai a szakasznak, az $AB'$, $AD'$, $CB'$, $CD'$ lapbeli átlók felezőpontjai, a kocka oldallapjainak középpontjai. Eszerint $P$ csak a $Q$ négyzet belsejében vagy kerületén lehet.

Fordítva, ha $P$ a $Q$-nak egy tetszés szerinti pontja, akkor található $AC$-n olyan $X$ és $B'D'$-n olyan $Y$, hogy $XY$ felezőpontja éppen $P$, éspedig $X$-et a $PB'D'$ sík, $Y$-t a $PAC$ sík metszi ki. Valóban, $P$, $X$, $Y$ mindegyike benne van mindkét síkban, tehát egy egyenesben, a két sík metszésvonalán vannak, és $P$ felezi az $XY$ szakaszt, mert $X$, $P$, $Y$ rendre az $L$, $S$, $L'$ sík pontja.

Ezek szerint az $XY$ szakaszok felezőpontjának mértani helye a $Q$ négyzet területének minden (belső és kerületi) pontja.

Eredményünket szemléletesen így is kimondhatjuk: az $XY$ szakasz mindig az $ACB'D' = T$ (szabályos) tetraéder belsejében, vagy valamelyik lapján, vagy élén van, a keresett mértani hely pedig $T$-nek az $S$ síkkal való metszete.

*b)* Hasonlóan adhatjuk meg a $Z$ pontok mértani helyét. Ha $Z$ vetülete $L$ és $L'$-re $Z_1$, $Z_2$, akkora $ZZ_1X$ és $ZZ_2Y$ derékszögű háromszögek hasonlók; átfogóik aránya $1 : 2$, ezért $Z$-re az $L$ és $L'$-től mért távolságok aránya mindig $1 : 2$, a mértani hely abban az $L$-lel párhuzamos $S^*$ síkban van, amely az $AA'$ oldalélt $1 : 2$ arányban osztja. Kézenfekvő az a sejtés, hogy $Z$ mértani helye a $T$-nek $S^*$-gal való metszete. Ennek a fentiekhez hasonló bizonyítását mellőzve csak az eredményt mondjuk ki. Az $AB'$, $CB'$, $CD'$, $AD'$ átlókat $1 : 2$ arányban osztó pontokat $M_1$, $N_1$, $N_2$, $M_2$-vel jelölve $Z$ mértani helye az $M_1N_1N_2M_2$ téglalap minden belső és kerületi pontja. A téglalap oldalai: $M_1M_2 = B'D'/3$ és $M_1N_1 = 2AC/3$.

*Juhász István* (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

*Megjegyzések.* 1. $P$ mértani helyét a következő könnyen bizonyítható segédtétel alapján is megkaphatjuk: Ha egy $XY$ szakaszt és $P$ felezőpontját (párhuzamos vetítéssel) valamely $S$ síkra vetítünk, akkor $P$-nek $P'$ vetülete felezi a szakasz $X'Y'$ vetületét. – Összes $XY$ szakaszainkat a fenti $S$-re vetítve csak azt kell belátnunk, hogy ha $X'$ az $A''C''$ és $Y'$ a $B''D''$ átló valamely pontja, akkor $P'$ amely itt azonos $P$-vel –, az $EFGH$ négyzet belsejében vagy a kerületén van.

2. A segédtétel alapján az I. megoldástól függetlenül úgy is kereshetjük a mértani helyet, hogy $XY$ szakaszainkat egyrészt $L$-re, másrészt a kocka valamelyik oldallapjára vetítjük. Az utóbbi esetben a vetület az oldallap $L$-lel párhuzamos oldalfelezője.

3. A legtöbb versenyző csak azt mutatta meg, hogy $P$ nem fekhet kívül $Q$-n, de nem bizonyította be, hogy $Q$ minden pontja valamely $XY$ szakasznak felezőpontja.