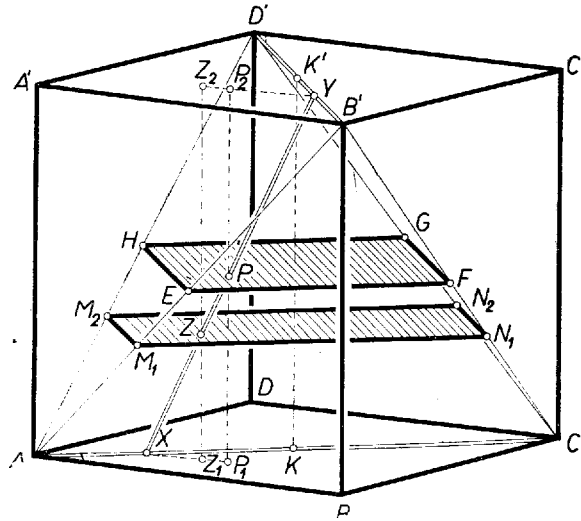


a) Legyen az XY szakasz P felezőpontjának az $ABCD = L$, ill. a vele párhuzamos $A'B'C'D' = L'$ lapon levő vetülete P_1 , ill. P_2 .



A PP_1X és PP_2Y derékszögű háromszögek egybevágók, mert P -nél levő szögek csúcsszögek, és átfogóik egyenlők, ezért $PP_1 = PP_2$, vagyis P mindig egyenlő távolságra van L és L' -től. Ugyanezt jelenti a $PX = PY$ egyenlőség arra az esetre, ha X az AC átló K és Y a $B'D'$ átló K' felezőpontjában van, mert ekkor $XY \equiv KK'$, merőleges L -re (ekkor az említett háromszögek elfajulnak). Ezek szerint a keresett mértani hely a kockának az AA' élre merőleges S szimmetriasíkjában van.

Ha X -et rögzítjük és Y végigfut $B'D'$ -n, akkor P leírja az $XB'D'$ háromszög $B'D'$ -vel párhuzamos középvonalát, melynek hossza $B'D'/2$. E szakasz szimmetrikus az $ACC'A'$ síkra és a kocka középpontjától való távolsága $XK/2$. Ha X végighalad AC -n, ez a szakasz a saját irányára merőlegesen toódik el, mert AC merőleges $B'D'$ -re; az eltolódás hossza, míg XA -tól K -ig, majd C -ig halad, $AK/2 + KC/2 = AC/2 = B'D'/2$. Tehát a szakasz által leírt idom az $EFGH = Q$ négyzet, ahol E és H az $X \equiv A$, F és G pedig az $X \equiv C$ helyzethez tartozó végpontjai a szakasznak, az AB' , AD' , CB' , CD' lapbeli átlók felezőpontjai, a kocka oldallapjainak középpontjai. Eszerint P csak a Q négyzet belsejében vagy kerületén lehet.

Fordítva, ha P a Q -nak egy tetszés szerinti pontja, akkor található AC -n olyan X és $B'D'$ -n olyan Y , hogy XY felezőpontja éppen P , és pedig X -et a $PB'D'$ sík, Y -t a PAC sík metszi ki. Valóban, P , X , Y mindegyike benne van mindkét síkban, tehát egy egyenesben, a két sík metszévonalán vannak, és P felezi az XY szakaszt, mert X , P , Y rendre az L , S , L' sík pontja.

Ezek szerint az XY szakaszok felezőpontjának mértani helye a Q négyzet területének minden (belső és kerületi) pontja.

Eredményünket szemléletesen így is kimondhatjuk: az XY szakasz mindig az $ACB'D' = T$ (szabályos) tetraéder belsejében, vagy valamelyik lapján, vagy élén van, a keresett mértani hely pedig T -nek az S síkkal való metszete.

b) Hasonlóan adhatjuk meg a Z pontok mértani helyét. Ha Z vetülete L és L' -re Z_1 , Z_2 , akkora ZZ_1X és ZZ_2Y derékszögű háromszögek hasonlóak; átfogóik aránya $1 : 2$, ezért Z -re az L és L' -től mért távolságok aránya mindig $1 : 2$, a mértani hely abban az L -vel párhuzamos S^* síkban van, amely az AA' oldalét $1 : 2$ arányban osztja. Kézenfekvő az a sejtés, hogy Z mértani helye a T -nek S^* -gal való metszete. Ennek a fentiekhez hasonló bizonyítását mellőzve csak az eredményt mondjuk ki. Az AB' , CB' , CD' , AD' átlókat $1 : 2$ arányban osztó pontokat M_1 , N_1 , N_2 , M_2 -vel jelölve Z mértani helye az $M_1N_1N_2M_2$ téglalap minden belső és kerületi pontja. A téglalap oldalai: $M_1M_2 = B'D'/3$ és $M_1N_1 = 2AC/3$.

Juhász István (Budapest, Madách I. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. P mértani helyét a következő könnyen bizonyítható segédétel alapján is megkaphatjuk: Ha egy XY szakaszt és P felezőpontját (párhuzamos vetítéssel) valamely S síkra vetítünk, akkor P -nek P' vetülete felezi a szakasz $X'Y'$ vetületét. – Összes XY szakaszainkat a fenti S -re vetítve csak azt kell belátnunk, hogy ha X' az $A''C''$ és Y' a $B''D''$ átló valamely pontja, akkor P' amely itt azonos P -vel –, az $EFGH$ négyzet belsejében vagy a kerületén van.

2. A segédétel alapján az I. megoldástól függetlenül úgy is kereshetjük a mértani helyet, hogy XY szakaszainkat egyrészt L -re, másrészt a kocka valamelyik oldallapjára vetítjük. Az utóbbi esetben a vetület az oldallap L -lel párhuzamos oldalfelezője.

3. A legtöbb versenyző csak azt mutatta meg, hogy P nem felelhet kívül Q -n, de nem bizonyította be, hogy Q minden pontja valamely XY szakasznak felezőpontja.