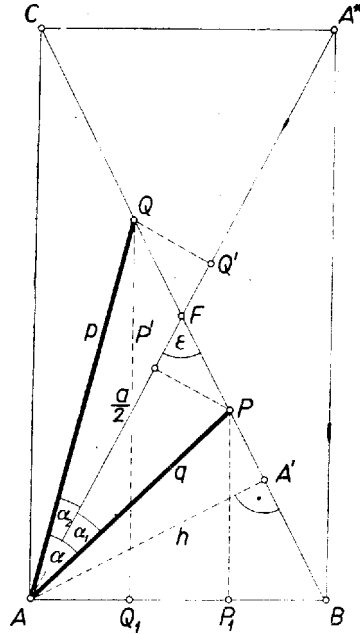


I. megoldás. A semmitmondó $n = 1$ esetet figyelmen kívül hagyjuk, mert ekkor $\alpha = 90^\circ$, és így sem $\operatorname{tg} \alpha$, sem a jobb oldalon álló hányados nincs értelmezve. – Legyen az átfogónak az F felezőpontot tartalmazó szakasza PQ úgy, hogy a pontok sorrendje az átfogón B, P, F, Q, C . Legyen $AP = q$ és $AQ = p$.



Mivel $PQ = a/n$ és az APQ háromszögnek a PQ alaphoz tartozó magassága h , azért e háromszög területét kétféleképpen kifejezve

$$\frac{a}{n} \cdot \frac{h}{2} = \frac{pq}{2} \sin \alpha, \quad \text{és innen} \quad \sin \alpha = \frac{ah}{npq}.$$

Másrészt a koszinusz-tétellel

$$\cos \alpha = \frac{p^2 + q^2 - \frac{a^2}{n^2}}{2pq}, \quad \text{és így} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2ah}{n \left(p^2 + q^2 - \frac{a^2}{n^2} \right)}.$$

A $p^2 + q^2$ összeget kifejezhetjük az adatokkal abból, hogy F a részekre osztott BC átfogó középső PQ szakaszát is felezi, tehát $PF = FQ = a/2n$, másrészt, hogy $AF = a/2$. Legyen $\angle AFP = \varepsilon$, ekkor $\angle AFQ = 180^\circ - \varepsilon$, ezért az AQF és APF háromszögekből a koszinusz-tétellel

$$\begin{aligned} p^2 &= \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2n} \right)^2 + 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2n} \cos \varepsilon, \\ q^2 &= \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2n} \right)^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2n} \cos \varepsilon, \end{aligned}$$

tehát

$$(1) \quad p^2 + q^2 = 2 \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + \left(\frac{a}{2n} \right)^2 \right] = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2n^2} = \frac{(n^2 + 1)a^2}{2n^2}.$$

Most már folytatólag

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2ah}{\frac{(n^2 + 1)a^2}{2n} - \frac{a^2}{n}} = \frac{4nh}{(n^2 - 1)a}.$$

Urbán László (Székesfehérvár, József A. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. (1)-et abból is megkaphatjuk, hogy véve A -nak F -re vonatkozó A^* tükörképét az APA^*Q négyszög paralelogramma, melynek oldalai p és q , átlói $2AF = a$ és $PQ = a/n$, és így az 1006. feladat segéditéle szerint¹

$$a^2 + \frac{a^2}{n^2} = 2(p^2 + q^2).$$

¹Lásd K. M. L. 21 (1960) 20. o.

II. megoldás. Legyen $PAF\angle = \alpha_1$, $FAQ\angle = \alpha_2$, P , Q vetülete az AF egyenesen P' , Q' , végül A vetülete BC -n A' . Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor $AF \perp BC$, $h = a/2$, P' és Q' az F -be esik, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha/2$, és $\text{tg } \alpha_1 = \text{tg } \alpha/2 = 1/n$, amiből

$$\text{tg } \alpha = \frac{2 \text{tg } \frac{\alpha}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{2n}{n^2 - 1},$$

ami az állításnak erre az esetre adódó egyszerűsödött alakja.

Ha ABC nem egyenlő szárú, akkor feltehetjük, hogy $AB < AC$. Így $BFA\angle = 2BCA\angle$ hegyesszög, tehát P' az AF szakaszon, Q' pedig FA^* -on van. Nyilvánvaló, hogy az FPP' és FQQ' derékszögű háromszögek egybevágók, és így $PP' = QQ'$, $FP' = FQ'$, tehát a PAP' és QAA' derékszögű háromszögekből

$$\text{tg } \alpha_1 = \frac{PP'}{AP'} = \frac{PP'}{AF - FP'}, \quad \text{tg } \alpha_2 = \frac{QQ'}{AQ'} = \frac{PP'}{AF + FP'},$$

tehát

$$\begin{aligned} \text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha_1 + \alpha_2) &= \frac{\frac{PP'}{AF - FP'} + \frac{PP'}{AF + FP'}}{1 - \frac{PP'^2}{AF^2 - FP'^2}} = \frac{2AF \cdot PP'}{AF^2 - (FP'^2 + PP'^2)} = \\ &= \frac{BC \cdot PP'}{AF^2 - FP'^2} = \frac{aPP'}{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4n^2}} = \frac{4n^2 \cdot PP'}{(n^2 - 1)a}. \end{aligned}$$

Másrészt az FPP' derékszögű háromszög hasonló FAA' -höz, mert F -nél levő szögük közös, ezért

$$\frac{PP'}{AA'} = \frac{FP}{FA} = \frac{a/2n}{a/2} = \frac{1}{n}, \quad \text{tehát} \quad PP' = \frac{h}{n},$$

ezt $\text{tg } \alpha$ legutóbbi kifejezésébe helyettesítve az állítást kapjuk.

Kiss Ildikó (Budapest, Teleki Blanka lg. III. o. t.)

III. megoldás. Számíthatjuk α -t különbségeként is, pl. $\alpha = BAQ\angle - BAP\angle$. Legyen P , Q vetülete AB -re P_1 , Q_1 ; ekkor a P_1BP , Q_1BQ derékszögű háromszögek hasonló ABC -höz, és átfogójuk a BC átfogó n -edrészének $(n-1)/2$ -szöröse, ill. $1 + (n-1)/2 = (n+1)/2$ -szöröse – ugyanis a BP és QC szakaszokba az F -et tartalmazó szakasz elvételével megmaradt $n-1$ számú szakasz fele-fele jut –, tehát

$$\begin{aligned} P_1P &= \frac{BP}{BC}AC = \frac{n-1}{2n}AC, & Q_1Q &= \frac{n+1}{2n}AC, \\ P_1B &= AQ_1 = \frac{n-1}{2n}AB, & Q_1B &= AP_1 = \frac{n+1}{2n}AB, \end{aligned}$$

hiszen egyenlő és egyirányú szakaszoknak ugyanazon egyenesre való vetületei egyenlők. Ezekkel

$$\begin{aligned} \text{tg } BAQ\angle &= \frac{Q_1Q}{AQ_1} = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{AC}{AB}, & \text{tg } BAP\angle &= \frac{P_1P}{AP_1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{AC}{AB}, \\ \text{tg } \alpha = \text{tg } (BAQ\angle - BAP\angle) &= \frac{\left(\frac{n+1}{n-1} - \frac{n-1}{n+1} \right) \cdot \frac{AC}{AB}}{1 + \frac{AC^2}{AB^2}} = \frac{4nAB \cdot AC}{(n^2 - 1)BC^2}. \end{aligned}$$

Végül figyelembe véve, hogy az $AB \cdot AC$ szorzat az ABC háromszög 2-szeres területét adja, ami az adatokkal kifejezve ah -val egyenlő, továbbá, hogy $BC = a$, $\text{tg } \alpha$ -nak az állításban szereplő kifejezésére jutunk.

Sebestyén Mihály (Szolnok, Verseghy F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Számos dolgozat α -t az $A'AQ$ és $A'AP$ szögek különbségeként számította, sokan mások pedig a külső szög tétele alapján mint az APA' és AQA' szögek különbségét.

Ha az AB és AC befogók közt elég nagy a különbség, vagy ha n elég nagy szám, akkor P és Q valóban A' ugyanazon oldalára esnek, és α az előbb említett két szög különbsége. De A' szét is választhatja P -t és Q -t. Némelyek erre is kitértek, $A'P$ -nek $A'Q$ -hoz képest előjelet tulajdonítottak, hasonlóan az $A'AP$ szöget forgásszögnek tekintették. Ezt a diszkussziót a III. megoldás elkerülte azzal, hogy a PAQ szögtartományon biztosan kívül eső AB irányt választotta

alapiránynak. – Az említett második számításmód mellett pedig gondolni kellett volna arra a lehetőségre is, ha P éppen A' -be esik, és így az $A'PA$ (ill. BPA) szög derékszög, tangense nincs értelmezve.

2. Az átfogó osztás pontjai közül csak P és Q -t használtuk, és az n számot is csak annyiban, hogy $PQ : BC = 1 : n$. Ezért n nemcsak páratlan természetes szám lehet, hanem bármely 1-nél nagyobb pozitív szám. ($0 < n < 1$ is lehet, vagyis $PQ > BC$. Szerk.) A kikötés csak az, hogy a PQ szakasz tükrös legyen F -re.

Kovács Imre (Békés, Szegedi Kis I. g. IV. o. t.)