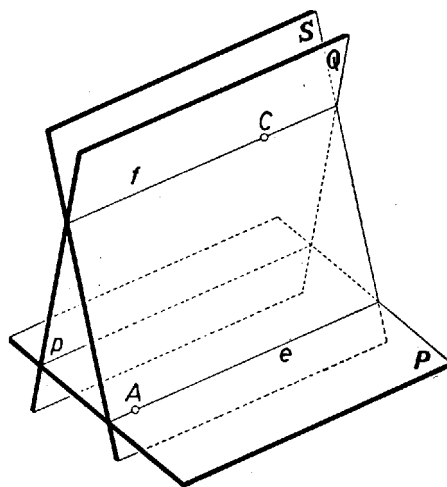


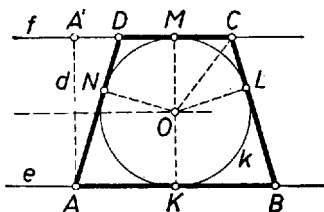
A keresett trapéz S síkja metszi P -t, mert van pontja P -ben: A és van pontja P -n kívül: C ; a metszésvonal éppen a meghatározandó $AB = e$ egyenes. Ugyanígy S a Q -t a keresett $CD = f$ egyenesben metszi. Az e és f egyenesek és velük S párhuzamosak p -vel.



1. ábra

Ha ugyanis pl. AB metszené p -t E -ben, akkor E a Q -nak is pontja volna, tehát S és Q -nak CD metszésvonala azonos lenne CE -vel, vagyis AB és CD metszenék egymást. Ezek szerint e és f egyértelműen megszerkeszthetők, és a feladat úgy egyszerűsödik, hogy B -nek e -n, D -nek f -en kell lennie.

Tekintsük a feladatot megoldottnak és legyen a trapézba írt kör érintési pontja az egymás utáni AB , BC , CD , DA oldalon rendre K , L , M , N , továbbá A vetülete f -en A' .



2. ábra

A trapéz egyenlő szárú voltából nyilvánvaló, hogy szimmetriatengelye átmegy a beírt kör középpontján, és így K , M -en is, tehát K és M felezik a párhuzamos oldalakat. Másrészt a KM tengely szétválasztja A -t, és C -t, és így A' -t és C -t is. AA' párhuzamos KM -mel, ezért $MA' = KA$; a szimmetriából $KA = KB$, végül a B és C -ből húzott érintőszakaszok egyenlőségéből $KB = LB$ és $CM = CL$. Ezekből egyrészt $MA' = LB$, másrészt összeadással $CA' = CM + MA' = CL + LB = CB$. Eszerint B rajta van a C körül CA' sugárral írt körön. B -t ismerve D -t a C -nek AB felező merőlegesére való tükröképe adja meg. Így eljárást kaptunk a keresett trapéz megszerkesztésére.

Az $ABCD$ trapéz megfelel a követelményeknek. Ugyanis benne $AB \parallel CD$, $AD = BC$, továbbá AA' felező merőleges és az $A'CB$ szög felezője metszéspontját O -val jelölve az O körül $AA'/2$ sugárral írt k kör érinti egyrészt e -t és f -et K , M -ben, és KM átmegy O -n és merőleges e , f -re, másrészt f -et és BC -t is érinti k , tehát $KB = LB = CB - CL = CA' - CM = MA' = KA$, így a KM egyenes az AB szakasz felező merőleges, ennélfogva AD – mint a BC tükröképe KM -re – ugyancsak érinti k -t.

B -re 2, 1, ill. 0 megoldást kapunk aszerint, hogy a C körül CA' sugárral írt kör metszi, érinti, ill. nem metszi e -t, más szóval, hogy CA' nagyobb, egyenlő, ill. kisebb az e , f , egyenespár $d = AA'$ távolságánál. B -ből D szerkesztése mindig egyértelmű. Ha $CA' = d$, akkor az $ABCD$ idom derékszögű érintőtrapéz, vagyis négyzet.

Várady Gábor (Győr, Révai M. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldásban „szokásos értelemben vett” egyenlő szárú trapézt szerkesztettünk, vagyis feltettük, hogy annak a két oldalnak, melyekről tudjuk, hogy párhuzamosak, közös a felező merőleges, tehát ez egyben szimmetriatengelye a négyszögnek. Tartsuk számon azonban, hogy az említett feltevés kizárja az egyenlő szárú trapéz fogalmköréből a paralelogrammákat, holott ezeknek is megvannak az egyenlő szárú trapézt meghatározó tulajdonságai: egyik pár szemben fekvő oldaluk párhuzamos, a másik pár pedig egyenlő hosszú. Ha mármost egyenlő szárú érintőtrapézként érintőparalelogrammát, azaz rombuszt is elfogadunk, akkor B és D -t az AC felező merőleges metszi ki e , ill. f -ből, vagyis a megoldás egyértelmű és mindig létezik, hacsak nem AC merőleges e -re.

2. Bár sokkal elterjedtebb szokás síkidomok leírása céljára a csúcsaikhoz írt betűket az idom valamelyik körüljárása mentén talált egymás utánjukban felsorolni, – még sincs kimondva, hogy a felsorolások csak így érthetők. (Szögletes

testek ilyen értelmű körüljárása általában nem is lehetséges.) Szórványosan előfordul az is, hogy a paralelogrammák, trapézok csúcsait jelölő betűket a két párhuzamos oldalon ugyanazon irányban végighaladva sorolják fel. Ilyen értelemben az adott A, C pontpár a keresett trapéz egyik szárának végpontjait is adhatja.

Így a trapézból ismerjük három egymás utáni oldal egyenesét, vagyis az idom két szögét, tehát e két szög felezőinek metszéspontjában megkapjuk a beírt kör O középpontját, majd A -t és C -t tükrözve az O -n átmenő, e -re merőleges egyenesen, megkapjuk B -t, D -t. (Az 1. megjegyzés szerinti rombusz-megoldás B, D -csúcsát pedig az említett szögfelezők metszik ki.)

Náray-Szabó Gábor (Budapest, József A. Gimn. III. o. t.)