

I. megoldás: A három kérdés megválaszolásának előkészítéséül vizsgáljuk az

$$(1) \quad y = \sqrt{x + \sqrt{2x-1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x-1}}$$

kifejezésnek mint x függvényének értékét, a megjegyzésnek megfelelően minden négyzetgyökvonásban a gyök abszolút értékét véve.

A belső négyzetgyök értéke akkor valós szám, ha $2x - 1 \geq 0$, $x \geq 1/2$. Ilyen x -ekre mindkét (nagy) négyzetgyök valós számot ad, mert az első alatt két nem negatív szám összege áll, a másodikban pedig a kisebbítendő és a kivonandó négyzetének különbségét vizsgálva, ha $x \geq 1/2$, akkor $x^2 - (\sqrt{2x-1})^2 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$, és mivel az alapok pozitívok, így azokra

$$x \geq \sqrt{2x-1}.$$

Az egyenlőségi jel $x = 1$ esetére érvényes.

Mivel a két gyökjel alatti kifejezés egymásnak ún. konjugáltja, azért kifejezésünk négyzete egyszerűbbnek ígérkezik. Valóban, összevonás után

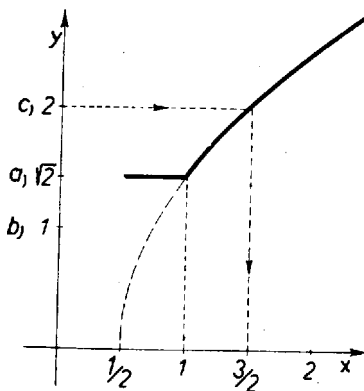
$$y^2 = 2x + 2\sqrt{x^2 - (2x-1)} = 2x + 2\sqrt{(x-1)^2} = 2x + 2|x-1|.$$

Már most $x \leq 1$ esetére $x-1$ negatív vagy 0, így $|x-1| = -(x-1) = 1-x$, ezért $y^2 = 2x + 2(1-x) = 2$, ennél fogva $y = \sqrt{2}$, állandó.

$x > 1$ esetére pedig $x-1$ pozitív, így $|x-1| = x-1$, tehát $y^2 = 2x + 2(x-1) = 4x-2$, ennél fogva $y = \sqrt{4x-2}$.

Ezek szerint az *a)* egyenlőség az $x \geq 1/2$, $x \leq 1$ értékekre, más szóval az $(1/2, 1)$ zárt intervallumban teljesül, másutt nem; a *b)* egyenlőség sehol sem teljesül, ez olyan egyenlet, amelynek nincs gyöke, mert a $\sqrt{4x-2}$ kifejezés értéke az $x = 1$ helyen $\sqrt{2}$, és x növekedtével növekszik, tehát $y \geq \sqrt{2}$, ha $x \leq 1/2$; végül a *c)* egyenlőség egyenlet, melynek gyöke $x = 3/2$, az egyenlőség ezen egyetlen érték mellett érvényes.

Klimó János (Kaposvár, közg. t. IV. o. t.)



II. megoldás: A bal oldalak egyszerűbbé tételére alkalmazzuk a $\sqrt{2x-1} = z$ helyettesítést. A négyzetgyök értékére tett megállapodásunknak megfelelően csak z nem negatív értékeit kell figyelembe vennünk. Kifejezve x -et z -vel $x = (z^2 + 1)/2$, tehát (1) a helyettesítéssel így alakul:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{z^2+1}{2} + z} + \sqrt{\frac{z^2+1}{2} - z} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{z^2+1+2z} + \sqrt{z^2+1-2z}) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z+1 + |z-1|). \end{aligned}$$

(A zárójel első tagjában az abszolút érték jelét mindjárt mellőzhettük, mert $z+1 \geq 1 > 0$.) Innen a fentiekhez hasonlóan

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq 1 \quad \text{esetére} \quad y &= \frac{1}{\sqrt{2}}[z+1 + (1-z)] = \sqrt{2}, \\ z \leq 1 \quad \text{esetére} \quad y &= \frac{1}{\sqrt{2}}[z+1 + (z-1)] = \sqrt{2z}, \end{aligned}$$

(lásd a grafikont).

Ezek szerint az *a)* egyenlőség mindazon x -ekre teljesül, amelyeket a $0 \leq z \leq 1$ -et teljesítő z értékek adnak meg; ezekből $x = (z^2 + 1)/2$ -re tekintettel $0 \leq z^2 \leq 1$, így $1 \leq z^2 + 1 \leq 2$ és $1/2 \leq x \leq 1$;

a *b)* egyenlőség semmilyen z -re és így semmilyen x -re sem teljesül, mert $z \geq 1$ mellett a bal oldal értéke: $y = \sqrt{2z} \geq \sqrt{2} > 1$;

a *c)* egyenlőség pedig $\sqrt{2z} = 2$ -ből $z = \sqrt{2}$ -vel, és ennél fogva $x = (2+1)/2 = 3/2$ mellett teljesül.

Holop András (Budapest, Petőfi S. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Több a II. megoldáshoz hasonló dolgozat nem zárta ki a $z < 0$ értékeket, ezért az

$$y = \frac{1}{2}(|z + 1| + |z - 1|)$$

alakból tetszetősebb grafikonhoz jutott, amely a fentén kívül az Y -tengelyre való tükörképét is tartalmazza, és így rajzzal a gimnáziumi IV. osztályos tankönyvből ismert módon magyarázza y -nak a középső intervallumbeli állandóságát.