

a) Legyen a keresett szám x , a nála d -vel kisebb szám y , és x^2 számjegyeinek száma k . Jelöljük a k darab 1-essel felírt számot C -vel, ekkor a feladat szerint

$$x^2 - y^2 = d \cdot C, \quad (1) \quad x - y = d. \quad (2)$$

A bal oldalon $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y) = d(x + y)$, tehát $d(x + y) = d \cdot C$, amit d -vel osztva ($d > 0$)

$$(3) \quad x + y = C.$$

Így $x > y$ miatt $2x > C$, azaz $4x^2 > C^2$. Viszont x^2 és C jegyeinek száma k , ezért $C \geq 10^{k-1}$, $C^2 \geq 10^{2k-2}$, és $10k > x^2$, tehát

$$4 \cdot 10^k > 4x^2 > C^2 \geq 10^{2k-2}.$$

A két szélső tagból kapott egyenlőtlenség alapján $4 > 10^{k-2}$, amiből következik, hogy $k \leq 2$. Nem lehet azonban $k = 1$, mert $C = x + y > 1$, tehát $k = 2$, $C = 11$, és x^2 kétjegyű szám, tehát x egyjegyű. Mivel így $x + y = 11$, azért $10 > x > y$, és (2)-re is tekintettel x , y és d szóba jövő értékei:

$$\begin{array}{llll} x = & 6, & 7, & 8, & 9, \\ y = & 5, & 4, & 3, & 2, \\ d = & 1, & 3, & 5, & 7. \end{array}$$

Ezekkel

$$\begin{array}{llll} x^2 = & 36, & 49, & 64, & 81, \\ y^2 = & 25, & 16, & 9, & 4. \end{array}$$

A harmadik és negyedik értékrendszer esetében x^2 második számjegye kisebb d -nél, ezek nem megoldásai a feladatnak. Az első két értékrendszer a feladat minden követelményét kielégíti, a keresett számok tehát 6 és 7.

b) Legyen a számrendszer alapszáma a . Az előző megfontolások egy részét átvehetjük, a többjegyű számokat az a -alapú számrendszerben értve. (1), (2) és (3) továbbra is érvényes, és a $4 > 10^{k-2} = (1 \cdot a + 0)^{k-2}$ egyenlőtlenség is érvényes marad, tehát

$$(4) \quad a^{k-2} < 4,$$

és $k > 1$, hiszen $C = x + y > 1$ is változatlanul fennáll.

Nem lehet a sem 2, sem 3. Ugyanis a d számjegye $a - 1$ -nél kisebb, mert különben x^2 -ből az ugyanannyi $a - 1$ jegyből álló számot levonva nem kaphatunk pozitív maradékot. Ilyen pozitív d nincs, ha $a = 2$; az $a = 3$ esetben pedig d csak 1 lehetne. Ekkor a (3)-ból és (2)-ből adódó

$$x = \frac{C + d}{2}$$

összefüggés szerint C páratlan, így k értéke nem lehet 2, tehát (4)-et figyelembe véve $k = 3$, így $x = 7$, és 7^2 a 3-alapú számrendszerben már több mint 3-jegyű.

Minden $a \geq 4$ alapszám esetében (4) alapján $k \leq 2$, tehát $k = 2$, $C = a + 1$ és x^2 kétjegyű, ezért $x^2 < a^2$, x egyjegyű, azaz $x < a$.

$$(5) \quad x + y = a + 1$$

és $x > y$ alapján y szóba jövő értékei 2, 3, 4, ..., a_0 , ahol a_0 az a legnagyobb egész szám, amelyre még $a_0 < a + 1 - a_0$, azaz $2a_0 < a + 1$.

Ha a páros, $a = 2u$, akkor $a_0 = u = \frac{a}{2}$, ha a páratlan, $a = 2u + 1$, akkor $a_0 = u = \frac{a-1}{2}$, tehát a_0 mindenképpen az a legnagyobb egész szám, amelyik még nem nagyobb $\frac{a}{2}$ -nél, a szokásos jelöléssel $a_0 = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$.

Minden ilyen y esetén $x = a + 1 - y$ és $d = x - y = a + 1 - 2y$ kielégíti (1)-et és (2)-t, továbbá x^2 kétjegyű, hiszen $x > \frac{C}{2} > \frac{a}{2}$ miatt

$$x^2 > \frac{a^2}{4} \geq a.$$

Az x , y , d számhármaskor akkor megoldásai feladatunknak, ha x^2 mindkét számjegye külön-külön d -vel nagyobb y^2 megfelelő jegyénél. Ha ez a feltétel a második jegyekre teljesül, vagyis az

$$x^2 = y^2 dC = y^2 + (d + ad)$$

összeadást jegyenként végezve (először a d , majd az ad tagot adva hozzá) $y^2 + d$ első számjegye ugyanaz, mint y^2 első jegye, akkor teljesül az első jegyekre is. Így ugyanis nem viszünk át maradékot, az ad tag az y^2 -nek a helyi értékű jegyét növeli d -vel, és x^2 első jegyét adja, mert itt nem lehet maradékátvitel, hiszen $x^2 < a^2$.

A második jegyek nagyságviszonyának vizsgálatát megkönnyíti a következő észrevétel: Legyen $z = y - 1$, ekkor x^2 és z^2 második számjegye megegyezik, hiszen így $x + z = a$, tehát $x^2 - z^2 = (x + z) \cdot (x - z) = a(x - z)$, különbségük osztható a -val. Elegendő tehát azoknak az y -értékeknek a számát meghatározni, melyek négyzetének második jegye

kisebb a náluk 1-gyel kisebb z szám négyzetének második jegyénél. Ez $z < y$ miatt csak úgy lehetséges, hogy z^2 első jegye kisebb y^2 első jegyénél, mégpedig pontosan 1-gyel, hiszen $y^2 - z^2 = y + z = 2y - 1 < x + y - 1 = a$.

Eszerint az $y = 2, 3, \dots, a_0$ számok négyzetében első jegyként minden számjegy előfordul a_0^2 első jegyéig ($a > 4$ esetén 0 is), és minden előforduló kezdő számjegyre pontosan 1 megfelelő y -érték tartozik, mégpedig a legkisebb azok közül a számok közül, amelyeknek négyzete az illető számjeggyel kezdődik. Ha y^2 első számjegye 0, akkor y -hoz nem tartozik megoldása a feladatnak, hiszen ekkor a $z = y - 1 \geq 1$ szám négyzetének második számjegye mindig kisebb y^2 második jegyénél. Így a feladatnak megfelelő y -értékek (és x, y, d értékrendszerek) száma egyenlő a_0^2 első számjegyével. Ezt megadja az $a_0^2 : a$ hányados egész része, tehát a megoldások száma

$$\left[\frac{1}{a} a_0^2 \right] = \left[\frac{1}{a} \left[\frac{a}{2} \right]^2 \right].$$

Eredményünk megfelel az a) részben kapott eredményünknek, hiszen $a = 10$ esetén $a_0 = 5$, és a_0^2 első jegye 2.