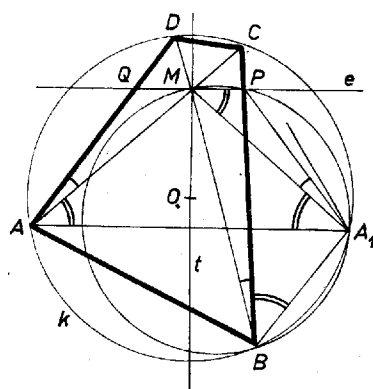


I. megoldás. Legyen az e egyenesnek a négyszög belsejébe eső szakasza PQ , és M felelje PQ -t. Ha e azonos a négyszög egyik átlójával, akkor a feladat állítása semmitmondó. Feltehetjük tehát, hogy e a két átló között halad, így a négyszöget szemközti oldalaiban metszi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy P a négyszög BC , Q a DA oldalszakaszán legyen. Tükrözzük az A csúcsot a PQ szakasz t felező merőlegesére, kapjuk az A_1 pontot. Megmutatjuk, hogy A_1 rajta van az $ABCD$ négyszög köré írt k körön.

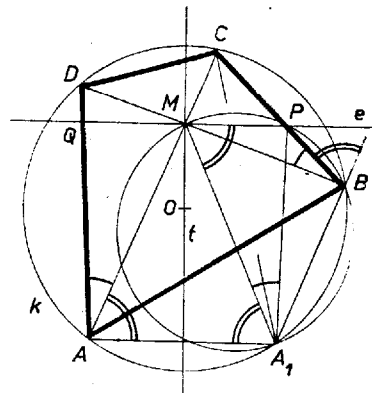
$AA_1 \parallel PQ$, hiszen mindkettő merőleges t -re. $\angle PMA_1 = \angle MA_1A$, mert váltószögek, $\angle MA_1A = \angle MAA_1$ a tükrözés miatt, és ez utóbbi azonos a $\angle CAA_1$ szöggel, tehát $\angle PMA_1 = \angle CAA_1$. (Az 1.a-1.b ábrákon t szétválasztja A -t és B -t.) Az A_1, B, P, M pontok egy körön vannak, hiszen

$$\angle PBM = \angle CBD = \angle CAD = \angle MAQ = \angle MA_1P,$$

egyrészt a kerületi szögek tétele, másrészt a tükrözés miatt, és mert az A_1, B pontok az MP egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak. Ha az A és B pontok az A_1C egyenes azonos oldalán vannak, akkor a B és M pontok is ugyanazon az oldalán vannak az A_1P egyenesnek, így az A_1P szakasz a B és M pontokból egyenlő szögben látszik.



1a. ábra

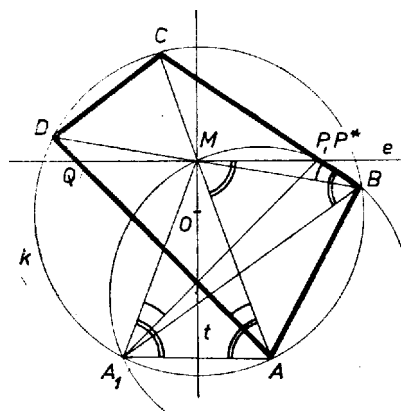


1b. ábra

Mivel $\angle A_1BP$ és $\angle A_1BC$ szögek azonosak, a $\angle PMA_1$ és $\angle CAA_1$ szögek pedig egyenlők, az A_1C szakasz is ugyanakkora szögben látszik az A és B pontokból, A_1 tehát valóban rajta van az A, B, C pontok által meghatározott k körön.

Ugyanezt kapjuk, ha az A_1C egyenes elválasztja az A és B pontokat (1.b ábra). Ebben az esetben az A_1P egyenes is elválasztja az M és B pontokat, az $\angle A_1BP$ és $\angle PMA_1$ szögek tehát 180° -ra egészítik ki egymást, így az $\angle A_1BC$ és $\angle CAA_1$ szögek is 180° -ra egészítik ki egymást, és A_1 most emiatt lesz a k körön.

Hasonlóan adódik állításunk, ha A és B a t -nek ugyanazon oldalán van (2. ábra).

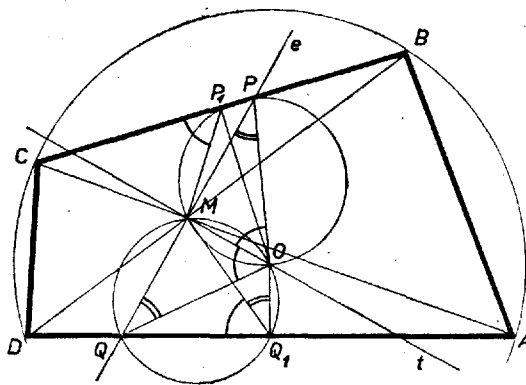


2. ábra

Mivel A_1 a k körön van, az AA_1 szakasz felezőmerőlegese, a t egyenes a k kör átmérője, így felezi a rá merőleges e egyenesre eső húrt, amint azt bizonyítanunk kellett.

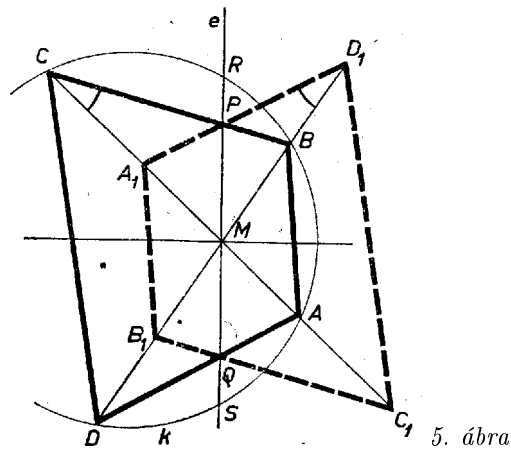
Megjegyzések. 1. Lényegében ugyanígy halad a megoldás, ha a t egyenest eleve az M -en átmenő átmérőnek vesszük fel (2. ábra). Ebben az esetben A_1 nyilván a k körre kerül, ellenben bizonyítanunk kell, hogy PQ is merőleges t -re. Mivel ezt nehéz közvetlenül belátni, a versenyzők többsége a feladat állításának a fordítottját bizonyította, hogy ti. ha egy az M -en átmenő e egyenesnek M a körre eső húrját felezi, akkor felezi a négyszögbe eső szakaszát is. Ha M és k kör O középpontja azonos, akkor – mint az könnyen látható – minden egyenesnek megvan mindkét tulajdonsága. Ha M és O nem azonos, akkor M nyilván akkor felezi az e egyenesre eső húrt, ha $e \perp OM$. Ha tehát belátjuk egyrészt, hogy ebből következik, hogy M felezi az e egyenes négyszögbe eső szakaszát, másrészt, hogy olyan egyenes is csak egy van, amelyiknek a négyszögbe eső szakaszát M felezi, akkor e kettő együtt kiadja a feladat állításának

2. Ha az egész négyszöget tükrözzük az OM egyenesre, akkor P és Q a megfelelő oldalak metszéspontja lesz, és azt kell megmutatnunk, hogy $PQ \perp OM$. Valóban, az M pontban keletkezett 12 szög közül a 3. ábrán azonosan jellettekről könnyen kimutatható, hogy egyenlőek, amiből már következik az állításunk. Ebben az esetben azonban fel kell használnunk, hogy olyan egyenes, amelyen levő húrt M felezi, ill. olyan egyenes, amelynek a négyszögre eső szakaszát M felezi, csak egy van, mert csak ennek belátása után következik a feladatunk állítása abból, hogy az általunk adott konstrukció mellett a PQ egyenesnek mindkét tulajdonsága megvan.



3. Azt viszont, hogy ha M felezi PQ -t, akkor a PQ szakasz t felező merőlegese átmegy a k kör középpontján, tükrözés nélkül is beláthatjuk (4. ábra). Legyen Q_1 az AD , P_1 a BC szakasz felezőpontja. Feltehetjük, hogy a Q_1 pontból a DM szakasz látszik hegyesszög alatt, ekkor az AMD , BMC háromszögek hasonlósága miatt a P_1 pontból ugyanakkora α szög alatt látszik a CM oldal. Attól függően, hogy a P , ill. a Q pont a P_1C , ill. Q_1D szakaszra esik-e vagy sem, az MP , ill. MQ szakasz vagy α , vagy $180^\circ - \alpha$ szög alatt látszik a P_1 , ill. Q_1 pontokból.

II. megoldás. Tükrözzük az $ABCD$ négyszöget és a köré írható k kört a négyszög átlóinak M metszéspontjára. Ha M mindkét átlót felezi, a négyszög és a k kör önmagába megy át, ebben az esetben az M ponton átmenő egyeneseknek a négyszögbe és a körbe eső szakaszát is felezi M , állításunk tehát igaz. Ha M csak egy átlót felez, válasszuk úgy a betűzést, hogy ez az AC átló legyen, és teljesüljön, hogy $BM < MD$. Akkor a tükrözés során az A és C csúcsok helyet cserélnek, a B csúcs, és a belőle kiinduló AB , BC oldalak a négyszög belsejébe, a D csúcs és a belőle kiinduló CD , DA oldalak a négyszögon kívülre kerülnek, így csak az AC átlónak felezi M a négyszögbe eső darabját, AC viszont egyben a k -nak is húrja, állításunk tehát ismét nyilvánvaló.



A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy M egyik átlót sem felezi. Válasszuk úgy a betűzést, hogy az AC átlón A , a BD átlón B legyen az M -hez közelebbi csúcs (5. ábra). A tükrözés során kapott A_1 és B_1 csúcs az eredeti négyszög belsejében lesz, a C_1 , D_1 csúcs pedig azon kívülre kerül, így csak a BC és A_1D_1 , ill. DA és B_1C_1 szakaszok metszhetik egymást a tükrözött és az eredeti négyszög területén. Legyenek a metszéspontok P és Q , ekkor csak a PQ egyenesnek felezheti M a négyszögbe eső szakaszát. A kapott BD_1P és A_1CP háromszögek hasonlóak, hiszen P -nél levő szögük egyenlő és

$$A_1CP_{\triangleleft} = ACB_{\triangleleft} = ADB_{\triangleleft} = A_1D_1B_1_{\triangleleft} = PD_1B_{\triangleleft},$$

emiatt

$$\frac{A_1P}{PC} = \frac{BP}{PD_1}.$$

A tükrözés miatt viszont $A_1P = AQ$ és $PD_1 = QD$, tehát

$$AQ \cdot QD = BP \cdot PC,$$

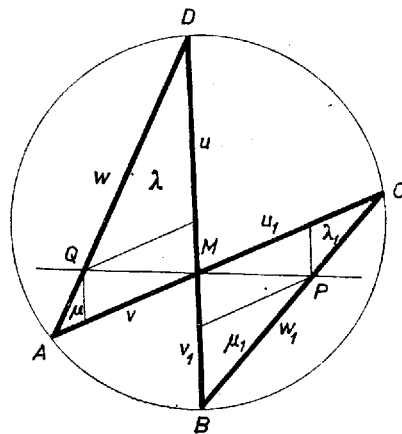
azaz a P és Q pontoknak a k körre vonatkoztatott hatványuk egyenlő. (Ismeretes, hogy egy k körhöz adott P pontból húzott szelő darabjainak szorzata független a szelő választásától – ezt a szorzatot nevezzük a P pont k körre vonatkozó hatványának.) Ebből már következik a bizonyítandó állítás, hiszen ha a PQ egyenes a k kört az R, S pontokban metszi, és $PS > QS$, akkor

$$RP \cdot PS = RQ \cdot QS,$$

és mindkét oldalból $RP \cdot QS$ -t levonva kapjuk, hogy

$$RP(PS - QS) = (RQ - RP)QS,$$

ahol $PS - QS = PQ = RQ - RP$, tehát valóban $RP = QS$, azaz $RM = MS$.



Megjegyzések. 1. Azt, hogy a P, Q pontok k -ra vonatkozó hatványa egyenlő, tükrözés nélkül is beláthatjuk.

Húzzunk P -n és Q -n át párhuzamosakat az AC , BD átlókkal (6. ábra), így az egymáshoz hasonló ADM , BCM háromszögek mindegyikét egy paralelogrammára és két háromszögre vágtuk fel. A keletkezett négy kis háromszög hasonló az eredeti háromszögekhez, a paralelogrammák is hasonlóak, és mivel PM és MQ átlóik egyenlők, egybevágók is. Legyenek az ADM és BCM háromszögek oldalai rendre u , v , w , ill. u_1 , v_1 , w_1 , és a DQ , QA , ill. CP , PB alapú kis háromszögek oldalai a megfelelő nagy háromszögek oldalainak rendre λ , μ , ill. λ_1 , μ_1 -szeresei. Az AC átlóval

párhuzamos oldalt a DQ és PB alapú, a BD átlóval párhuzamos oldalt pedig a QA , PC alapú háromszögben felírva kapjuk, hogy

$$\lambda v = \mu_1 u_1; \quad \mu u = \lambda_1 v_1,$$

ezeket összeszorozva

$$\lambda \mu u v = \lambda_1 \mu_1 u_1 v_1.$$

Az ADM , BCM háromszögek hasonlósága miatt

$$u : w = u_1 : w_1 \quad \text{és} \quad v : w = v_1 : w_1,$$

ezt a két aránypárt összeszorozva kapjuk, hogy

$$uv : w^2 = u_1 v_1 : w_1^2.$$

Ebből következik, hogy

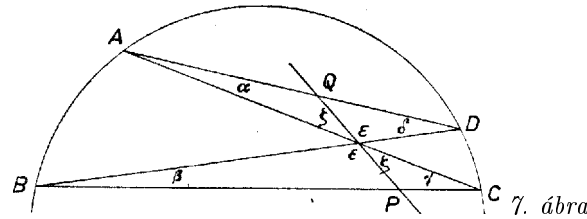
$$\lambda w \cdot \mu w = \lambda_1 w_1 \cdot \mu_1 w_1,$$

ami épp a bizonyítandó egyenlőség:

$$DQ \cdot QA = CP \cdot PB.$$

Beláthatjuk ezt a szinusz-tétel felhasználásával is (7. ábra):

$$\frac{BP}{QD} = \frac{BP}{MP} : \frac{QD}{QM} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} : \frac{\sin \varepsilon}{\sin \delta} = \frac{\sin \zeta}{\sin \alpha} : \frac{\sin \zeta}{\sin \gamma} = \frac{AQ}{QM} : \frac{PC}{MP} = \frac{AQ}{PC}.$$



2. Ha felhasználjuk, hogy két egymást metsző körre azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, a két kör metszéspontjain átmenő egyenes, akkor megoldásunk rövidebben is befejezhető. A P pontnak a k körre vonatkozó hatványa $BP \cdot PC$, a k' körre vonatkozó hatványa $A_1P \cdot PD_1$, mivel ez a két szorzat az A_1BD_1C húrnégyszögben egyenlő, P – és hasonló módon Q is – rajta van a k és k' körök hatvány-vonalán, így a két kör centrálisa merőleges PQ -ra, a tükrözés miatt átmegy M -en, és felezi a k kör PQ egyenesre eső húrját.