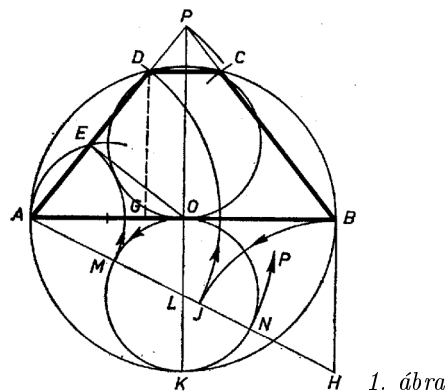


**Megoldás.** A megszerkesztendő  $ABCD$  trapéz egyenlő szárú, mert húrtrapéz, és szárai a hosszabb párhuzamos oldal szemben levő végpontjából mindenesetre hegyes szögben látszanak, így kisebbek a kör átmérőjénél. A trapéznak a kör átmérőjével egyenlő  $AB$  oldala tehát a hosszabb párhuzamos oldal.



A szár hosszát számítással határozzuk meg. Legyen  $AB = 1$ ,  $AD = BC = x$ ,  $D$  vetülete az  $AB$  oldalon  $G$  (1. ábra). Az  $ABD$  háromszög Thalész tétele alapján derékszögű, így az ismert mértani középárányos tétel szerint  $AD^2 = AB \cdot AG$ , azaz  $AG = x^2$ . Ezért  $DC = AB - 2AG = 1 - 2x^2$ . Mivel továbbá a trapézba kör írható, azért  $AD + BC = AB + DC$ , vagyis

$$(1) \quad 2x = 1 + (1 - 2x^2),$$

aminek pozitív gyöke

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Ennek alapján a szerkesztés a következő. Az adott kör  $O$  középpontján át tetszés szerint felvett  $AB$  átmérő  $B$  végpontjában meghúzzuk az érintőt, felmérjük rá a  $BH = BO = 1/2$  szakaszt, ekkor  $AH = \sqrt{5}/2$ . Az  $AH$  szakaszt metszük a  $H$  körül  $HB$  sugárral írt körrel  $J$ -ben, ekkor  $AJ = x$ . Végül az  $A$  és  $B$  körül  $AJ$  sugárral írt körívvel az adott körből kimetszünk a  $D$ , illetőleg  $C$  csúcsot.

Így a csúcsok a körön vannak, másrészt teljesül (1) is, ezért a trapézba érintő kör írható, tehát megfelel a követelményeknek.

*Megjegyzés.* A fenti szerkesztést felére kicsinyítve végezhetjük el, a kör  $AB$ -re merőleges sugarai egyike,  $OK$  fölé kört írva. Ennek középpontját  $L$ -l,  $AL$ -l,  $AL$ -l való metszéspontjait  $M$ -mel és  $N$ -nel jelölve ( $AM < AN$ )  $AM = AJ/2$ , ennek alapján az  $AO$  átmérőjű Thalész körből kimetszhetjük az  $AD$  oldal  $E$  felezőpontját.

Az  $N$  metszéspont alapján viszont a szárak  $P$  metszéspontját jelölhetjük ki a trapéz szimmetriatengelyén. Ugyanis  $OE$ , mint az  $OAD$  egyenlő szárú háromszög magassága, merőleges  $AP$ -re, így a  $PAO$  derékszögű háromszögből

$$AP = \frac{AO^2}{AE} = \frac{1}{4 \cdot AE} = \frac{1}{4 \cdot AM} = \frac{1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5}}{4} + \frac{1}{4} = AL + LN = AN.$$