

I. megoldás. Legyen a keresett magasság¹ h , a megfigyelő szemének merőleges vetülete a feladatban szereplő síkon legyen u távolságra a budai kapuzattól – jelöljük ennek látószögét α -val – és az ennek alsó végpontjához vezető látósugár zárjon be φ szöget a függőleges iránnyal. Ekkor

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{u}{h} \\ \operatorname{tg}(\varphi + \alpha) &= \frac{u}{h - m} = \frac{\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \alpha} = \frac{u/h + \operatorname{tg} \alpha}{1 - (u \operatorname{tg} \alpha)/h} = \frac{u + h \operatorname{tg} \alpha}{h - u \operatorname{tg} \alpha}. \end{aligned}$$

Ebből u -ra és h -ra a következő egyenlet adódik:

$$uh - u^2 \operatorname{tg} \alpha = uh + h^2 \operatorname{tg} \alpha - um - hm \operatorname{tg} \alpha,$$

vagy rendezve és $\cotg \alpha$ -val szorozva

$$u^2 + h^2 - um \cotg \alpha - hm = 0.$$

A pesti kapuzatra vonatkozóan ugyanilyen egyenlet adódik, csak α és u helyébe β és $u + d$ lép:

$$(u + d)^2 + h^2 - (u + d)m \cotg \beta - hm = 0.$$

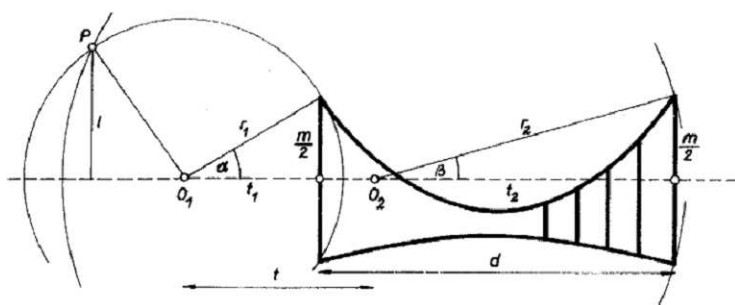
A két egyenlet különbségét képezve meghatározható u és ezt ismerve az első egyenletből a keresett h magasság, mint az egyenlet pozitív gyöke:

$$\begin{aligned} (u + d)^2 - u^2 - [u(\cotg \beta - \cotg \alpha) + d \cotg \beta] m &= \\ = u[2d - m(\cotg \beta - \cotg \alpha)] - d(m \cotg \beta - d) &= 0, \\ u &= \frac{d(m \cotg \beta - d)}{2d - m(\cotg \beta - \cotg \alpha)}, \\ h &= \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + um \cotg \alpha - u^2}. \end{aligned}$$

Adataink közül csak a nagyobbik szög lehet a budai és a kisebb a pesti kapuzat látószöge, mert megcserélve a szögeket $m \cdot \cotg 11,4^\circ < 40 \cdot 5 = 200$ folytán u -ra negatív értéket kapnánk. A számításokat 4 jegyű függvénytáblázattal végezve

$$\begin{aligned} m \cotg \beta &= 196,4, & m(\cotg \beta - \cotg \alpha) &= 288, \\ 2d - m(\cotg \beta - \cotg \alpha) &= 292, \\ \lg u &= 2,2902, & um \cotg \alpha &= 38\,700, \\ (m/2)^2 &= 400, & u^2 &= 38\,050, \\ h &= 20 + \sqrt{1050} = 52,4 \approx 52 \text{ m.} \end{aligned}$$

(Mivel az adatok egy része csak 2 értékes jegyig ismert, az eredménynek is legfeljebb két jegye elfogadható.)



¹ Az ábrán h bejegyzése pótlendő.

II. megoldás. A megfigyelő P nézőpontja egyrészt rajta van azon a látószögműköríven; amelyről a közelebbi kapuzat α szög alatt látszik, másrészt azon is, amelyikről a távolabbi β szög alatt látszik. Legyen a körök középpontja O_1 , O_2 , távolságuk a megfelelő kapuzattól t_1 , ill. t_2 , sugaruk r_1 , ill. r_2 , P távolsága az O_1O_2 egyenestől l ; ekkor a keresett magasság $m/2 + l$. l -et mint az O_1O_2P háromszög magasságát határozzuk meg. Az oldalak kiszámíthatók: $O_1P = r_1$, $O_2P = r_2$, és $O_1O_2 = t_1 + d - t_2$; jelöljük az utóbbit t -vel. A középponti és kerületi szögek közti összefüggésből adódik, hogy r_1 , t_1 és $m/2$ egy α hegyesszöget tartalmazó derékszögű háromszög oldalai, r_2 , t_2 és $m/2$ pedig egy β hegyesszöget tartalmazó, így

$$r_1 = \frac{m}{2 \sin \alpha}, \quad r_2 = \frac{m}{2 \sin \beta},$$

$$t_1 = \frac{m}{2} \cotg \alpha, \quad t_2 = \frac{m}{2} \cotg \beta, \quad t = d + t_1 - t_2.$$

Mostmár a háromszög területét egyrészt az l magasság felhasználásával, másrészt Heron képletével kiszámítva és l -et kifejezve – ha $(r_1 + r_2 + t)/2$ -t s -sel jelöljük –

$$l = \frac{2\sqrt{s(s-r_1)(s-r_2)(s-t)}}{t}.$$

4 jegyű függvénytáblázatot használva $r_1 = 101,2$, $r_2 = 244,1$, $t = 146$, $l = 31,5$ adódik, így $h = 51,5 \approx 52$ m.

Megjegyzés. Adataink mellett $s - r_2 = 1,5$ adódik, tehát a számított 4-jegyű értékek utolsó két jegye játszik lényeges szerepet. Ebből érthető az eredmény pontatlansága, a két megoldásban kapott értékek eltérése.