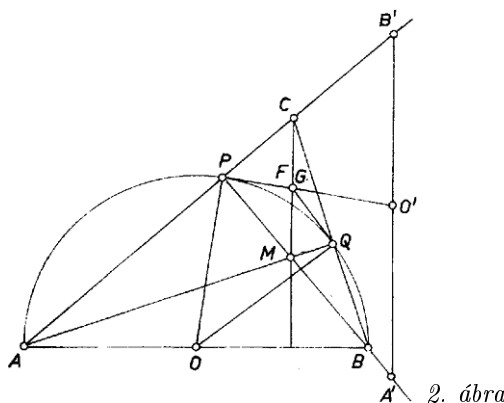


Az alábbi megoldások mindegyikében a kört az ABC háromszög AB oldala, mint átmérő fölé rajzoljuk. A háromszögekben szokásos jelöléseket használjuk, legyen továbbá a kör és az AC , BC oldal metszéspontja P , illetőleg Q , a kör középpontja O , és a háromszög magasságpontja M .

I. megoldás. Messe a CM magasságvonalat a kör P -beli érintője F -ben, a Q -beli érintő G -ben (2. ábra). Azt kell belátnunk, hogy F és G egybeesnek.



Thalész tétele miatt P a B -ből húzott magasság talppontja, ezért a P körüli, pozitív irányú 90° -os elforgatás az ABP háromszöget átviszi egy a hozzá hasonló MCP háromszöggel párhuzamos oldalú háromszögbe, a PO sugarat pedig a rá merőleges PF érintőre. Mivel O felezi AB -t, azért F a CM szakasz felezőpontja.

Az ABQ háromszöget Q körül az előbbivel ellentétes irányban átforgatva a CMQ háromszöggel hasonló helyzetbe, ugyanígy látható, hogy G is a CM szakasz felezőpontja, azaz egybeesik F -fel. – Ezzel a feladat állításánál többet bizonyítottunk be, mégpedig azt, hogy a kérdéses metszéspont felezi a magasságpont és az első oldallal szemben fekvő csúcs közti szakaszt.

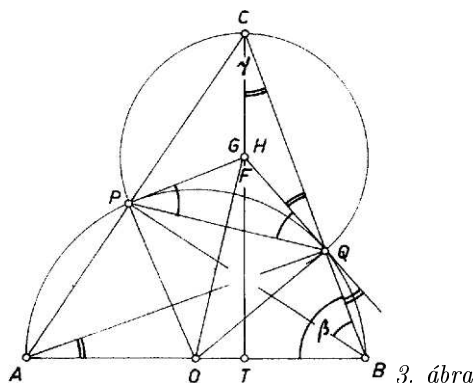
II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a P és Q pontokban húzott érintők H metszéspontját C -vel összekötő egyenes merőleges AB -re, vagyis az ABC háromszög magasságvonala.

A HPQ háromszög egyenlő szárú; P -nél és Q -nál levő szöge egyenlő a kör PQ ívéhez tartozó bármely kerületi szöggel, így a PBQ szöggel is, melynek nagysága a PBC derékszögű háromszögből $90^\circ - y$. Ezért a PQ szakasz H -ból $180^\circ - 2(90^\circ - y) = 2y$ szögben látszik. PQ -nak C -ből vett látószöge viszont y , és mivel C és H a PQ egyenesnek ugyanazon a partján van, azért a H körül írt, P -n és Q -n átmenő kör átmegegyezik a C csúcson is. Ezért a CHQ háromszög egyenlő szárú, tehát

$$(1) \quad \angle HQT = \angle QCH = \angle BCT,$$

ahol T az AB és CH egyenesek metszéspontja.

A HQC szög csúcsharminya egy a QB íven nyugvó kerületi szög, ezért egyenlő az ugyanazon az íven nyugvó QAB szöggel, ami $90^\circ - \beta$. Így a BCT háromszög C -nél levő szöge $90^\circ - \beta$, vagyis a B -nél levő szögének pótszöge, ezért a T -nél levő szöge derékszög, CT vagyis CH valóban merőleges AB -re.



III. megoldás. A C -ből húzott magasság és a Q pontbeli érintő metszéspontját ismét G -vel jelölve azt fogjuk megmutatni, hogy a G mint középpont körül írt, C -n áthaladó körön rajta van P is, Q is (3. ábra). Ebből ugyanis már következik, hogy $GP = GQ$, és így az OPG és OQG háromszögek három-három oldalban megegyezve egybevágóak, ezért a GPO szög egyenlő a GQO szöggel, az utóbbi pedig 90° , tehát GP a P -ben húzott körérintő.

Az AOQ és CGQ háromszögek oldalai páronként merőlegesek egymásra, tehát a háromszögek hasonlóak, és így az előbbivel együtt az utóbbi is egyenlő szárú háromszög, $QG = CG$, Q valóban a mondott körön van, és

$$CGQ \sphericalangle = AOQ \sphericalangle = 2 ABQ \sphericalangle,$$

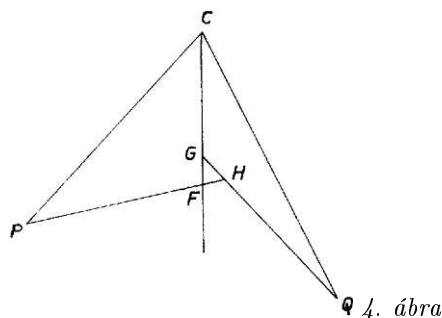
mert az utolsó két szög az AQ íven nyugvó középponti, illetőleg kerületi szög.

Másrészt az $ABQP$ húrnégyszögben az ABQ belső és a CPQ külső szög egyenlő, mert mindkettő az APQ szög 180° -ra kiegészítő szöge, ezért

$$CGQ \sphericalangle = 2 CPQ \sphericalangle.$$

Végül G és P a BC oldalegyenes ugyanazon oldalán van, ezért a mondott kör átmegy a P ponton is. Ezt akartuk bizonyítani.

IV. megoldás. Legyen a C -ből húzható magasság és a P -beli, illetőleg Q -beli érintő metszéspontja ismét F , illetőleg G , a két érintő metszéspontja H . Az előző megoldásban láttuk, hogy $CG = QG$. Hasonlóan látható be, hogy $CF = PF$. Továbbá $PH = QH$, mert a körhöz a H pontból húzható érintőszakaszok.

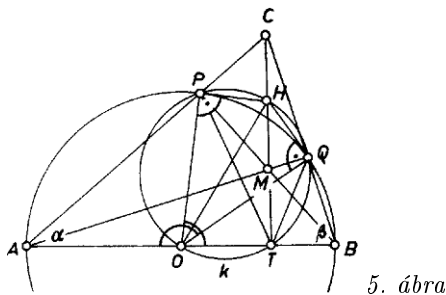


Ha F , G és H nem esne egybe, és például G a CF szakasz belső pontja lenne (4. ábra), akkor H a PF szakasz F -en túli meghosszabbításán és a QG szakasz belsejében lenne, mert így (és az eredeti feltevések szerint) PF belső pontban metszi a CGQ háromszög CQ oldalát, a CG oldalát viszont a meghosszabbításán, tehát a GQ oldalt is belső pontban metszi, vagyis

$$PH > PF = CF > CG = QG > QH = PH,$$

ami lehetetlen.

Ha F esnék a CG szakaszra, akkor hasonlóan adódik, hogy mindenütt az ellenkező értelmű egyenlőtlenség állana fenn, ami ugyancsak lehetetlen. Kell tehát, hogy a három pont egybeessen, és így az érintők a magasságvonalon messék egymást.



V. megoldás. Legyen a két érintő metszéspontja H , a C csúsból húzott magasság talppontja T (5. ábra). Említettük már, hogy AQ és BP a háromszög másik két magassága. OHP és OHQ háromszögek derékszögűek, és az OH szakasz mint átmérő fölé rajzolt k kör átmegy P -n és Q -n. Megmutatjuk, hogy ez a kör átmegy a T talpponton is¹. Ebből már következik a feladat állítása, ugyanis ekkor az OTC derékszög TC szára átmegy az O -ból induló átmérő másik végpontján, a H ponton is.

Az AOQ és a BOP szög, mint a BOQ , illetőleg AOP egyenlő szárú háromszög külső szöge, 2β , illetve 2α nagyságú, másrészt együttesen a 180° -ot egyszer és a POQ szöget kétszeresen fedik le, így

$$POQ \sphericalangle = 2\alpha + 2\beta - 180^\circ = 180^\circ - 2\gamma.$$

¹ A k kör az ABC háromszög Feuerbach-köre, amely átmegy a magasságok talppontjain, az oldalak felezőpontjain és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain. Lásd pl. Gallai T. – Hódi E. – Péter R. – Szabó P. – Tolnai J.: Matematika az ált. gimn. III. o. számára, 12. kiadás, Tankönyvkiadó, Bp. 1962. 183 – 188. o. – Az alábbiakban azonban erre való hivatkozás nélkül bizonyítjuk be állításunkat.

Az $ATQC$ és $BTPC$ négyszögek húrnégyszögek (az első az AC , a második a BC mint átmérő fölé rajzolt Thalesz-körben), és így a BTQ , illetőleg ATP külső szögük egyenlő a $PCQ = y$ szöggel. Ezek alapján

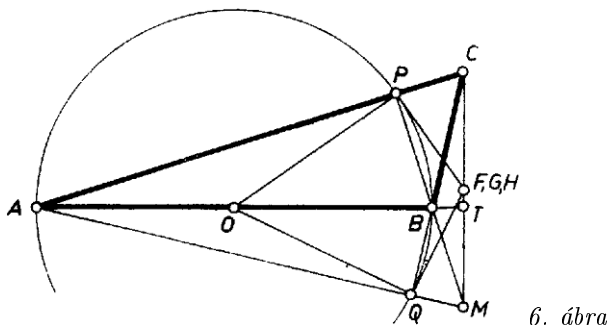
$$PTQ_{\triangleleft} = 180^{\circ} - ATP_{\triangleleft} - BTQ_{\triangleleft} = 180^{\circ} - 2y = POQ_{\triangleleft}.$$

Mivel O és T a PQ egyenesnek ugyanazon az oldalán fekszik, azért O , P , Q és T valóban egy körön van, és ezzel igazoltuk állításunkat.

Megjegyzések. 1. A feladat megoldható a koordináta geometria módszereivel is, de így még a koordináta rendszer szokásos célszerű megválasztása esetén is hosszadalmas számításokkal jutunk célhoz.

2. Ha az ABC háromszög bármelyik szöge derékszög, a feladat állítása érdektelen. Ha ugyanis a derékszög C -nél van, a kérdéses érintők, ha pedig A és B valamelyikénél van, akkor az egyik érintő és a magasság esik egybe.

3. Az olvasó a fenti megoldások csekély változtatásával könnyen beláthatja, hogy az állítás tompaszögű háromszögre is igaz, oldalszakasz helyett természetesen oldalegyenest mondva. Egy ilyen helyzetet mutat be a 6. ábra.



6. ábra