

A megoldások során a következő jelöléseket fogjuk használni: A járművek sebességét – mint az ilyen feladatoknál ez szokásos – állandónak tételezve fel, legyen a tehergépkocsi sebessége v , a személygépkocsi sebessége V , A és B távolsága s , a hazaérkezés közös időpontja x .

I. megoldás. Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2 , a személygépkocsi $V(t_2 - t_1)$ utat tesz meg, és ez együtt a teljes úthossz

$$s = vt_2 + V(t_2 - t_1).$$

A tehergépkocsi menetideje $t_1 - r$ órával több, mint a személygépkocsié, mert az utóbbi A -ból t_1 órával később indult, és B -be r órával később érkezett, mint a tehergépkocsi, azaz

$$\frac{s}{v} = \frac{s}{V} + t_1 - r.$$

E két egyenletből az s utat kiküszöbölve

$$(1) \quad t_2 + \frac{V}{v}(t_2 - t_1) = \frac{v}{V}t_2 + t_2 - r,$$

és ezt a v/V hányadosra, mint ismeretlenre rendezve a

$$t_2 \left(\frac{v}{V} \right)^2 - r \left(\frac{v}{V} \right) - (t_2 - t_1) = 0$$

egyenlethez jutunk, amelynek pozitív gyöke

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{2t_2} (r + \sqrt{r^2 + 4t_2(t_2 - t_1)}).$$

$t_2 > t_1 (\geq 0)$ esetén a gyök mindig valós. A negatív gyököknek nem tulajdonítunk értelmet.

A második találkozás után mind a két gépkocsi még $x - t_3$ ideig volt úton, és ezalatt együttesen ismét befutották az s utat, azaz

$$v(x - t_3) + V(x - t_3) = s = vt_2 + V(t_2 - t_1),$$

amiből $V + v$ -vel való osztás és rendezés után

$$x = t_3 + t_2 - \frac{1}{\frac{v}{V} + 1} \cdot t_1$$

A numerikus adatokkal

$$\frac{v}{V} = \frac{2}{3} \quad \text{és} \quad x = 16\frac{2}{5} \text{ óra,}$$

azaz a két gépkocsi 16 óra 24 perckor ért haza.

Megjegyzések. 1. Közvetlenül az (1) egyenlet egy kissé átrendezett alakjához vezet a következő megfontolás. Az első találkozásig a tehergépkocsi vt_2 , a személygépkocsi $V(t_2 - t_1)$ utat tett meg, és ekkor mindegyik előtt annyi út állt, mint amennyit a másik már megtett. A tehergépkocsi a hátralevő útját $\frac{V(t_2 - t_1)}{v}$ idő, a személygépkocsi $\frac{vt_2}{V}$ idő alatt teszi meg, de ez utóbbi r órával később ér célba, ezért

$$\frac{V(t_2 - t_1)}{v} + r = \frac{vt_2}{V}.$$

2. Hasonló gondolatmenettel x is meghatározható. A visszaindulástól a második találkozásig a tehergépkocsi a személygépkocsi előtt álló $V(x - t_3)$ utat tette meg. Ehhez $\frac{V(x - t_3)}{v}$ időre volt szüksége. Hasonlóan a személygépkocsi a találkozás előtt $\frac{v(x - t_3)}{V}$ idővel indult vissza. Ennek a két időnek a különbsége egyben az egész út megtételéhez szükséges idők különbsége is. Az odamenetre vonatkozó adatok szerint ez az időkülönbség $t_1 - r$, azaz

$$\frac{V(x - t_3)}{v} - \frac{v(x - t_3)}{V} = t_1 - r,$$

amiből x a v/V hányados ismeretében kiszámítható.

II. megoldás. Legyen az első találkozás helye C . A személygépkocsi és a tehergépkocsi menetidőinek aránya az AB úton ugyanaz, mint az AC úton. Legyenek a menetidők az AB úton T , illetőleg t , így

$$T : t = (t_2 - t_1) : (t - t_2)$$

Másrészt láttuk, hogy

$$t - T = t_1 - r.$$

T kiküszöbölésével

$$t^2 - (2t_2 - r)t + t_2(t_1 - r) = 0,$$

ahonnan a nagyobbik gyök

$$t = t_2 + \frac{1}{2}(-r + \sqrt{r^2 + 4t_2(t_2 - t_1)})$$

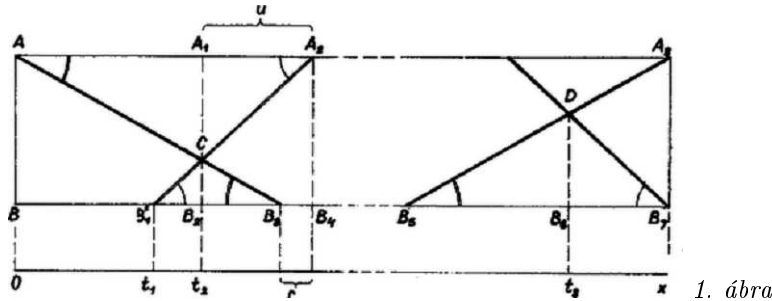
(ugyanis nyilvánvalóan $t > t_2$, a másik gyök nem adhatja a feladat megoldását).

Most már kiszámíthatjuk a második találkozástól a hazaérkezésig eltelt $x - t_3$ időt. Ennyi idő alatt a teherautó az egész út $(x - t_3)/t$ részét, a személyautó az $(x - t_3)/T$ részét teszi meg, a kettő együtt az egész utat – az út 1-szeresét – adja, azaz

$$\begin{aligned} \frac{x - t_3}{t} + \frac{x - t_3}{T} &= 1, \\ x = t_3 + \frac{1}{\frac{1}{t} + \frac{1}{T}} &= t_3 + \frac{t}{1 + \frac{t - t_2}{t_2 - t_1}} = t_3 + \frac{t(t_2 - t_1)}{t - t_1}. \end{aligned}$$

A numerikus adatokkal $t = 6$, $x = 16,4$ adódik.

III. megoldás. Megoldhatjuk a feladatot a mozgások idő-út grafikonjának vázlatára támaszkodó számítással is.



Mindegyik autó oda vissza útját (külön-külön) egyenlő hajlású szakaszok ábrázolják, ezért végpontjaik, valamint a találkozásokat jelentő pontok közül alkalmasan választott ponthármasok hasonló háromszögeket határoznak meg, és ezek alapján a találkozási pontok vetületei arányos részeket vágnak le. Az 1. ábra jelöléseivel

$$\frac{B_1B_2}{B_1B_3} = \frac{A_2A_1}{A_2A} = \frac{B_7B_6}{B_7B_5} = \frac{B_7B_6}{BB_3}.$$

1. ábra

Legyen $A_1A_2 = u$ az az idő, amennyivel az első találkozás után a személyautó A -ba érkezik. Ezt mint az első két

hányados egyenlőségéből adódó másodfokú egyenlet pozitív gyökét kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{t_2 - t_1}{t_2 + u - r - t_1} &= \frac{u}{t_2 + u}, \\ u^2 - ru - t_2(t_2 - t_1) &= 0, \\ u - \frac{1}{2}(r + \sqrt{r^2 + 4t_2(t_2 - t_1)}) &= 0.\end{aligned}$$

Ennek alapján a keresett időpont a negyedik és a második hányados egyenlőségéből adódik:

$$\begin{aligned}\frac{x - t_3}{t_2 + u - r} &= \frac{u}{t_2 + u}, \\ x = t_3 + u \frac{t_2 + u - r}{t_2 + u} &= t_3 + u \left(1 - \frac{r}{t_2 + u}\right).\end{aligned}$$

Numerikusan $u = 8/3$ óra, és $x = 16,4$ óra.