

Adjuk hozzá az első egyenlethez a második egyenlet 3-szorosát, így a bal oldal $(x+y)^3$ lesz. Ebből köbgyökvonással

$$(1) \quad x+y = \sqrt[3]{a+3b},$$

majd ezt a második egyenletbe helyettesítve osztással

$$xy = \frac{b}{\sqrt[3]{a+3b}},$$

hacsak $a+3b \neq 0$. Szorítunk egyelőre erre az esetre. Feltételünk mellett $x+y$ és xy mindig léteznek és egyértelműen meghatározott értékek, mert a köbgyökvonás a valós számok körében mindig elvégezhető és egyértelmű. Legyen

$$\sqrt[3]{a+3b} = B \quad \text{és} \quad b/B = C,$$

akkor x és y a következő egyenlet két gyöke:

$$z^2 - Bz + C = 0,$$

vagyis

$$\frac{1}{2}(B + \sqrt{B^2 - 4C}) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}(B - \sqrt{B^2 - 4C}),$$

bármelyik sorrendben véve. A diszkriminánst a -val és b -vel kifejezve

$$B^2 - 4C = \frac{1}{B} (B^3 - 4BC) = \frac{1}{\sqrt[3]{a+3b}} (a + 3b - 4b) = \frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}},$$

így a gyökök

$$(2) \quad \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{a+3b} + \sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}} \right) \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{a+3b} - \sqrt{\frac{a-b}{\sqrt[3]{a+3b}}} \right)$$

x és y akkor valósak, ha a négyzetgyök alatt pozitív szám vagy nulla áll. A négyzetgyök alatti tört értéke akkor pozitív, ha számlálója és nevezője egyszerre pozitív vagy negatív, tehát ha

$$a-b > 0 \quad \text{és} \quad a+3b > 0 \quad \text{vagy} \quad a-b < 0 \quad \text{és} \quad a+3b < 0.$$

Az első esetben, ha $b > 0$, akkor $a+3b = a-b+4b > a-b$, tehát elég feltenni, hogy $a-b > 0$; ha pedig $b \leq 0$, akkor $a-b = a+3b-4b \geq a+3b$, és így elég az utóbbi kifejezésről megkövetelni, hogy pozitív legyen. Hasonló megfontolásokat alkalmazva a második esetben is, azt nyerjük, hogy x -re és y -ra két különböző valós érték adódik (és mint már mondtuk, szerepük felcserélhető), ha

- I. $a-b > 0$ és $b > 0$, vagy
- II. $a+3b > 0$ és $b \leq 0$, vagy
- III. $a+3b < 0$ és $b \geq 0$, vagy
- IV. $a-b < 0$ és $b < 0$.

A négyzetgyök értéke nulla, ha $a=b$ (és $\neq 0$, különben $a+3b=0$ lenne), ekkor egy megoldás van:

$$x=y = \frac{1}{2}\sqrt[3]{a+3b}.$$

Ha végül $a+3b=0$, akkor $x+y=0$, és ez a második egyenlettel csak úgy fér össze, ha $b=0$; ekkor $a=-3b=0$ is fennáll. Ekkor minden x -re $y=-x$ választással megoldását kapjuk az egyenletrendszernek. – Ha viszont $a+3b=0$ és $b \neq 0$, akkor az egyenletrendszernek nincs megoldása.

Megjegyzések. 1. Ha (2)-ben a számlálóból és nevezőből külön-külön vonunk négyzetgyököt, elveszíthetjük a III. és IV. eseteket.

2. Az $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ azonosság felhasználásával és a két egyenlet elosztásával ($x, y, x+y \neq 0$) az

$$\frac{x^2-xy+y^2}{xy} = \frac{a}{b}$$

egyenlethez, majd $x/y = u$ helyettesítéssel rendezés után az

$$u^2 - (1+a/b)u + 1 = 0$$

másodfokú egyenlethez juthatunk. u -t kiszámítva az egyik gyök a másikkal kifejezhető. E kifejezést pl. (1)-be helyettesítve a gyökök maguk is kiszámíthatók, de a fentieknel lényegesen bonyolultabb alakban adódnak.