

I. megoldás. Jelöljük a középső számot c -vel, a számtani sorozat különbségét d -vel, ekkor a feladat feltételei:

$$(1) \quad \begin{aligned} (c-2d)^3 + (c-d)^3 + c^3 + (c+d)^3 &= \\ &= 16(c-2d+c-d+c+c+d)^2 = 16(2(2c-d))^2, \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} (c-d)^3 + c^3 + (c+d)^3 + (c+2d)^3 &= \\ &= 16(c-d+c+c+d+c+2d)^2 = 16(2(2c+d))^2. \end{aligned}$$

A második az elsőből megkapható úgy, hogy d helyébe $-d$ -t írunk (és a tagokat fordított sorrendbe írjuk), ez felhasználható lesz az átalakítások meggyorsítására. Az (1) egyenletet rendezve és 2-vel egyszerűsítve

$$2c^3 - 3c^2d + 9cd^2 - 4d^3 = 128c^2 - 128cd + 8d^2.$$

Hasonlóan (2)-ből

$$2c^3 + 3c^2d + 9cd^2 + 4d^3 = 128c^2 + 128cd + 8d^2.$$

Vonjuk le a második egyenletből az első és osszunk 2-vel:

$$3c^2d + 4d^3 = 128cd.$$

Ez teljesül, ha $d = 0$. Ekkor (1)-ből

$$4c^3 = 256c^2, \quad c = 0 \quad \text{vagy} \quad c = 64.$$

Ha $d \neq 0$, akkor a

$$3c^2 - 128c + 4d^2 = 0$$

egyenletnek kell teljesülnie. Szorozzunk 3-mal és egészítsük ki az első két tagot teljes négyzetté:

$$(3) \quad (3c - 64)^2 + 3(2d)^2 = 2^{12}.$$

Itt, ha c egész, a bal oldal első tagja nem 0, és feltevésünk szerint a második sem. Legyen $3c - 64 = 2^k u$, $2d = 2^l v$, ahol u, v páratlan és $k, l < 6$. Nem lehet k és l különböző, mert akkor 2 alkalmas hatványának kiemelése után 1-nél nagyobb páratlan szám marad vissza, s így nem keletkezhet a jobb oldali 2^{12} érték. Ha $k = l$, akkor az

$$u^2 + 3v^2 = 2^{12-2k} = 4^{6-k}$$

egyenlethez jutunk, amelynek páratlan u és v -ből álló megoldását keressük. Ismeretes, hogy páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékkal. Az egyenlet bal oldala szerint 8-cal osztva 4-et ad maradékkal, tehát csak úgy lehet 2-nek egy hatványa, ha egyenlő 4-gyel, azaz $k = 5$, $u = \pm 1$, $v = \pm 1$, tehát

$$3c - 64 = \pm 32, \quad 2d = \pm 32.$$

Az első egyenletből csak pozitív előjel mellett kapunk egész c -t:

$$c = 32, \quad d = \pm 16.$$

A feladat feltételeinek tehát a

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 16, & 32, & 48, & 64 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 64, & 64, & 64, & 64, & 64 \\ 64, & 48, & 32, & 16, & 0 \end{array}$$

sorozatok felelhetnek meg, és a számításokat elvégezve azt találjuk, hogy ezek valóban meg is felelnek.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit használva az (1) egyenlet bal oldalán az első és utolsó, továbbá a második és harmadik tag összegét alakítsuk át az $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ azonosság alapján. Ekkor a bal oldal így alakul:

$$\begin{aligned} (2c-d)[(c-2d)^2 - (c-2d)(c+d) + (c+d)^2] + (2c-d)[(c-d)^2 - \\ -(c-d)c + c^2] = (2c-d)(2c^2 - 2cd + 8d^2). \end{aligned}$$

Így az egyenletet 0-ra redukálva $2(2c-d)$ -t kiemelhetünk:

$$2(2c-d)(c^2 - cd + 4d^2 - 64c + 32d) = 0.$$

Hasonlóan a (2) egyenletből

$$2(2c+d)(c^2 + cd + 4d^2 - 64c - 32d) = 0.$$

Ha $d = 2c$, akkor az előbbi egyenlet teljesül, az utóbbi így alakul:

$$(4) \quad 8c^2(19c - 128) = 0.$$

Ennek egész gyöke csak $c = 0$, amiből $d = 0$.

A $d = -2c$ esetben az előbbi egyenlet megy át (4)-be, s így újabb megoldást nem kapunk.

Ha $d \neq \pm 2c$, akkor a következő egyenletrendszernek kell teljesülnie:

$$c^2 - cd + 4d^2 - 64c + 32d = 0,$$

$$c^2 + cd + 4d^2 - 64c - 32d = 0.$$

Az egyenletek összegének felét és különbségének felét véve az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert kapunk, hiszen az utóbbiak különbsége, ill. összege az eredeti egyenleteket adja:

$$c^2 + 4d^2 - 64c = c(c - 64) + 4d^2 = 0, \quad (c - 32)d = 0.$$

Az utóbbi egyenletből vagy $c = 32$, vagy $d = 0$ kell, hogy teljesüljön. Az első esetben az előbbi egyenletből

$$4d^2 = 32^2 \quad d = \pm 16,$$

az utóbbi esetben pedig

$$c = 0, \quad \text{vagy } c = 64.$$

Ezek az előbbi megoldásban talált számtani sorozatokra vezetnek.

Megjegyzések. 1. A feltételek két ismeretlenre két egyenletet adnak, ezekből az ismeretlenekre véges sok értékpár adódik. Mint a II. megoldás mutatja, nem szükséges lényegesen kihasználni a számok egész voltát, mindössze a többi feltételeket kielégítő

$$-384/19, -128/19, 128/19, 384/19, 640/19$$

és az ennek megfordításával keletkező sorozat kizárására.

2. Az I. megoldásban az (1) és (2)-ből keletkező (3) egyenletet oldottuk meg a keresett számok egész voltát lényegesen kihasználva. A közben felmerült $c = 32/3$, $d = \pm 16$ értékpárokhöz tartozó számtani sorozatok nem csak nem állnak egészekből, de a feladat többi feltételét sem elégítik ki. Ez nem meglepő, hiszen a megoldott (3) egyenlet nem ekvivalens az (1) és (2)-ből álló egyenletrendszerrel. Ezért az I. megoldásnál szükséges a nyert sorozatokra a követelmények teljesülésének ellenőrzése. Az előző pontban említett nem egész sorozat viszont az I. megoldásban nem jelentkezett, amit az magyaráz, hogy ott csak egész megoldást kerestünk, $c = 128/19$, $d = \pm 256/19$ -höz pedig a (3) egyenletnek nem egész megoldása tartozik.