

I. megoldás. Írjuk γ helyébe $180^\circ - (\alpha + \beta)$ -t, majd igyekezzünk szorzattá alakítani:

$$\begin{aligned}\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= \cos \alpha + (1 - \cos \alpha) \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 1 - (1 - \cos \alpha) + (1 - \cos \alpha) \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ &= 1 - (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta) + \sin \alpha \sin \beta.\end{aligned}$$

Itt a második tag nem pozitív, mert a koszinusz-függvény nem vesz fel 1-nél nagyobb értéket, a harmadik pedig kisebb 1-nél, mert egyik tényezője sem nagyobb 1-nél, de nem lehet mindkettő egyszerre 1 sem (nem lehet α is, β is 90°). Így

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < 2,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Az állítás helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű, mert ekkor az egyik tag nem pozitív, a másik kettő mindegyike pedig 1-nél kisebb.

Hegyeszögű háromszögben válasszuk a betűzést úgy, hogy γ és a vele szemben levő $AB = c$ oldal legyen a legkisebb, illetve a legkisebbek egyike. Jelöljük továbbá γ csúcsát C -vel, az AC , BC oldalakat b -vel, ill. a -val; legyen C merőleges vetülete az AB egyenesen C_1 , ez az oldal belső pontja. Így

$$c = AC_1 + C_1B = b \cos \alpha + a \cos \beta.$$

Innen, mivel feltevés szerint $a \geq c$, $b \geq c$, így

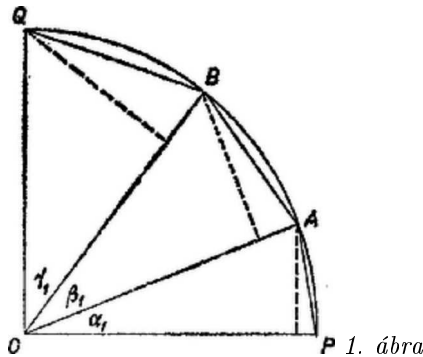
$$1 = \frac{b}{c} \cos \alpha + \frac{a}{c} \cos \beta \geq \cos \alpha + \cos \beta;$$

a harmadik szögre $\cos \gamma < 1$, tehát helyes az állítás hegyesszögű háromszögben is.

III. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség, mint az előző megoldásban is láttuk, nyilvánvalóan helyes, ha a háromszög nem hegyesszögű. Hegyeszögű háromszögre $\alpha_1 = 90^\circ - \alpha$, $\beta_1 = 90^\circ - \beta$, $\gamma_1 = 90^\circ - \gamma$ pozitív hegyesszögek, melyek összege 90° , és

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha_1 + \sin \beta_1 + \sin \gamma_1.$$

Ezt az összeget szemléltethetjük a következő módon: egységnyi sugarú OPQ negyedkörbe rajzoljuk be az α_1 , ill. β_1 nagyságú POA , AOB szögeket (1. ábra).



Ekkor $\angle BOQ = \gamma_1$, és a POA , AOB , BOQ háromszögekben a sugár alkotta oldalakra merőleges magasság hossza rendre $\sin \alpha_1$, $\sin \beta_1$, $\sin \gamma_1$, így a vizsgálandó összeg az $OPABQ$ ötszög területének kétszeresével egyenlő, tehát kisebb, mint az egységnyi sugarú félkör területe, $\pi/2$. Hegyeszögű háromszögre tehát

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma < \frac{\pi}{2} (< 1,571).$$

IV. megoldás. Alakítsuk két koszinusz összegét szorzattá:

$$\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 2 \sin \frac{\alpha}{2},$$

mert mindkét tényező pozitív, hiszen $\alpha/2$ és $|\beta - \gamma|/2$ hegyesszögek. Fejezzük ki $\cos \alpha$ -t is a fele akkora szög szinuszával, akkor azt nyerjük, hogy

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

A második tag nem lehet pozitív, így a bizonyítandó állításon túlmenően azt bizonyítottuk be, hogy

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Itt akkor érvényes az egyenlőség jele, ha egyrészt $\cos((\beta - \gamma)/2) = 1$, másrészt $\sin(\alpha/2) = 1/2$. Az első egy háromszög szögeire csak akkor teljesül, ha $\beta = \gamma$, a második akkor, ha $\alpha = 60^\circ$; ekkor az első feltétel szerint $\beta = \gamma = 60^\circ$, azaz a háromszög szabályos.

Az (1) egyenlőtlenségben tehát szabályos háromszögre egyenlőség, más háromszögekre a „kisebb” jel érvényes.

Megjegyzés. Az előző megoldás ábrája alapján finomabb elemzéssel szintén bizonyítható az (1) egyenlőtlenség hegyesszögű háromszögre, és kiterjeszthető a meg gondolás nem hegyesszögű háromszögekre is.

V. megoldás. Fejezzük ki a szögek koszinuszát a koszinusz-tétel alapján az oldalakkal. Vizsgáljuk először két koszinusz összegét:

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta &= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2ac} = \\ &= \frac{a^2 - b^2}{2c} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{a} + \frac{c}{b} \right) - \frac{(a+b)(a-b)^2}{2abc}. \end{aligned}$$

Mindhárom szögpárra felírva a megfelelő kifejezést és összeadva azokat, a pozitív tagok összegében fellép minden törttel a reciproka is, így az összeg a következőképpen alakítható tovább:

$$\begin{aligned} 2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) - \\ &\quad - \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{2abc} = \\ &= 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ac} \right) - \\ &\quad - \frac{(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (c+a)(c-a)^2}{2abc} = 3 - \\ &\quad - \frac{(a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2}{2abc} \leq 3, \end{aligned}$$

ugyanis mindegyik négyzet szorzója pozitív, mert a háromszög két oldalának az összege nagyobb, mint a harmadik oldal. Így

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}.$$

Itt akkor áll egyenlőség, ha a fenti tört számlálójában $a - b = b - c = c - a = 0$, azaz szabályos háromszögre.

Megjegyzés: többen észrevették a bal oldal következő átalakítási lehetőségét:

$$\begin{aligned} \frac{a^2b + a^2c + ab^2 + b^2c + ac^2 + bc^2 - a^3 - b^3 - c^3}{2abc} &= \\ &= \frac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) + 2abc}{2abc}. \end{aligned}$$

Innen Heron képletét, az $abc = 4rt$ és $t = \varrho s$ összefüggéseket felhasználva, ahol s a kerület felét, t a háromszög területét, r és ϱ a körülírt és beírt kör sugarát jelöli, a következőt nyerjük:

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + \frac{16t^2}{16rts} = 1 + \frac{\varrho}{r}.$$

Világos, hogy $\varrho < r$, amiből következik a feladat állítása. Az is belátható (trigonometria felhasználása nélkül is), hogy $\varrho \leq r/2$, amiből (1) következik.