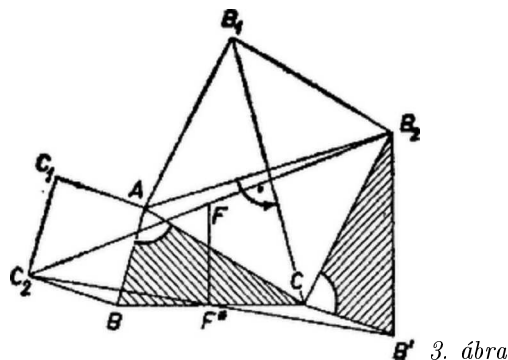


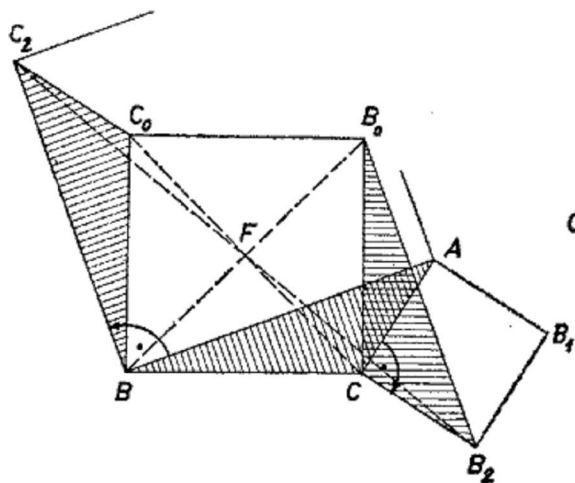


A végzett forgatás folytán $B'B_2$ merőleges BC -re és egyenlő vele. Most már az FF^* szakasz a C_2B_2B' háromszög középvonala, tehát egyenlő a $B'B_2$ és BC szakaszok felével. Ezek szerint B , C és F egyenlő távolságra vannak F^* -tól, ez pedig azt jelenti, hogy F a BC átmérő fölé rajzolt körön van.

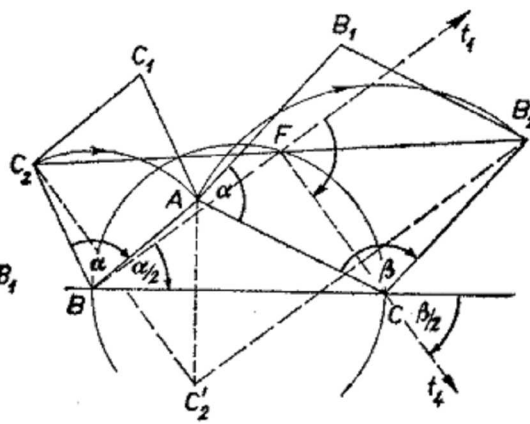
Ez a bizonyítás tetszés szerinti alakú ABC háromszög esetén érvényes.

III. megoldás. Forgassuk el az ABC háromszöget előbb B körül 90° -kal úgy, hogy A a C_2 -be jusson, majd C körül 90° -kal úgy, hogy A a B_2 -be jusson, legyen az első esetben C új helyzete C_0 , a második esetben B új helyzete B_0 (4. ábra). A két forgatás ellentétes irányú, a négyzetek kifelé való szerkesztése miatt. A két forgatási szög összege 180° , ezért BC_2 és B_0B_2 párhuzamosak és ellentétes irányúak. Továbbá egyenlőek is, és ezért a $BC_2B_0B_2$ négyszög paralelogramma. Így a C_2B_2 átló kérdéses F felezőpontja a BB_0 átlót is felezi.

Másrészt a forgatásokból következik, hogy a BC_0B_0C négyszög négyzet, tehát az átlók közös F felezőpontjából az oldalak derékszögben látszanak, így F a BC oldal, mint átmérő fölé rajzolt Thales-körön van, éppen a BC -re merőleges átmérő egyik végpontja.



4. ábra



5. ábra

IV. megoldás. A C_2 pontot átvihetjük B_2 -be úgy, hogy elforgatjuk először B körül $\alpha = 90^\circ$ -kal, – így A -ba kerül –, majd A -t elforgatjuk C körül ugyanabban az irányban $\beta = 90^\circ$ -kal (5. ábra).

Ismeretes, hogy egy (síkbeli) forgatás helyettesíthető bármely két olyan egymás utáni tükrözéssel, amelyek tengelye átmegy a forgatás középpontján, és az első tengelyt a második tengelybe átvivő forgatás fele akkora szögű, mint az eredeti forgatás, és azzal megegyező irányú.

Helyettesítsük a mondott forgatásokat két-két tükrözéssel úgy, hogy ezek t_1 , t_2 és t_3 , t_4 tengelypárja közül t_2 és t_3 azonos legyen. Így ugyanis a harmadik tükrözés visszaállítja a második tükrözés előtti helyzetet, és a négy tükrözés kettőre csökkenthető. Mivel t_2 nek B -n, t_3 -nak C -n kell átmennie, így mindkettőnek egyaránt a BC egyenest kell választanunk. Ilyen választás mellett C_2 -t a B -n áthaladó és BC -vel $\alpha/2$ szöget bezáró t_1 , majd a C -n átmenő és BC -vel $\beta/2$ szöget bezáró t_4 tengelyen való tükrözés viszi át B_2 -be.

Ez a két tükrözés – az idézett tétel megfordítása alapján – helyettesíthető egyetlen forgatással, amelynek középpontja a t_1 és t_4 metszéspontja, szöge kétszer akkora, mint a t_1 -et t_4 -be átvivő forgatás, és iránya megegyezik az utóbbi forgatás irányával. A két tengely szöge (mint a t_1 , t_2 és t_4 határolta háromszög külső szöge)

$$(1) \quad \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

így C_2 -t a B_2 -be 180° -os forgatás viszi át, vagyis a tengelyek metszéspontja éppen a B_2C_2 szakasz F felezőpontja.

Mivel pedig az F pontból a BC szakasz 90° -os szögben látszik, azért F rajta van a BC átmérőjű Thales-körön, ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzés. A bizonyításban α -ról és β -ről csak azt használtuk fel (1)-ben, hogy összegük 180° . A feladat állítása tehát helyes marad akkor is, ha a háromszög AB és AC oldalára kifelé olyan rombuszokat rajzolunk, melyeknek B -nél, ill. A -nál levő szöge egyenlő; továbbá akkor is, ha mindkét oldalra befelé rajzoljuk a rombuszokat. Az általánosított állítás bizonyítható – értelemszerű módosításokkal a II. és III. megoldás gondolatmenetével is.