

I. megoldás. Világos, hogy nem lehet mindkét fellépő szögfüggvény negatív. Belátjuk, hogy egyik sem lehet az. Ha ugyanis pl. $\sin x < 0$, $\cos x \geq 0$, akkor a bal oldalt

$$\sin x + \cos x (1 + \sin x)$$

alakban írva $0 \leq 1 + \sin x < 1$, így mindkét tag abszolút értéke kisebb, mint 1, és az első tag negatív, tehát a kifejezés kisebb, mint 1. Hasonlóan látható, $\sin x$ és $\cos x$ szerepét felcserélve, hogy $\cos x$ sem lehet negatív.

Ha $\sin x \geq 0$, $\cos x \geq 0$, akkor – mivel 0 és 1 közti szám nem kisebb, mint a négyzete –

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x \geq \sin x + \cos x \geq \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Itt mindenütt az egyenlőség jelének kell fennállnia ahhoz, hogy (1) teljesüljön. Az első esetben akkor áll egyenlőség, ha vagy $\sin x = 0$ – és ekkor $\cos x \geq 0$ folytán, $\cos x = 1$ –, vagy $\cos x = 0$, $\sin x = 1$. Ezekben az esetekben (1) valóban fenn is áll, tehát megtaláltuk az egyenlet összes megoldását. A megfelelő szögértékek:

$$x = k \cdot 360^\circ, (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ és } x = 90^\circ + k \cdot 360^\circ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

II. megoldás. Vigyük át a bal oldal harmadik tagját a jobb oldalra és emeljünk négyzetre

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x.$$

A bal oldal első két tagjának az összege 1, így az egyenlet a következő alakba rendezhető át:

$$\sin x \cos x (4 - \sin x \cos x) = 0.$$

Az utolsó tényező értéke legalább 3, így az egyenlet csak úgy teljesülhet, ha $\sin x = 0$, vagy $\cos x = 0$. Ezeket (1)-be írva kapjuk, hogy $\cos x = 1$, ill. $\sin x = 1$ kell legyen. Ilyen x szögek valóban vannak is:

$$\begin{aligned} x &= k \cdot 360^\circ & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \text{ ill.} \\ x &= 90^\circ + k \cdot 360^\circ & (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$