

Van az M , M' pontpárnak egy olyan helyzete, amelyben a k -hoz húzott második érintők párhuzamosak. Ezt a pontpárt úgy kaphatjuk meg, hogy k -nak az AO -ra merőleges átmérője végpontjaiban, (Q_0 , Q'_0 -ben) húzunk érintőket. Ezek A -ra szimmetrikus pontpárt metszenek ki t -ből, mert OA a köztük levő sáv középvonala. Ha M , M' a sávon kívül van, akkor Q , Q' a C -t tartalmazó Q_0 , Q'_0 félkörön van, így a második érintők metszik egymást, még pedig t -nek azon a partján, amelyiken k van; így k a PMM' háromszögnek beírt köre (4. ábra).



Ha M és M' egyike B -be esik, és ez különbözik A -tól, akkor ebből a pontból nem húzható t -től különböző érintő, viszont tekinthetjük a második érintőnek is t -t. A másik pont ekkor B -nek A -ra vonatkozó tükörképe, és ez a két második érintő metszéspontja is, tehát a mértani helynek az M és M' mondott helyzetéhez tartozó pontja is.

6. ábra

Ha A egybeesik B -vel, akkor k is, t is, az M , M' pontpár is, így a belőlük húzott érintőpár is tükrös a BC egyenesre, tehát a P pont ezen az egyenesen van. Az egyenes bármely a körön kívüli pontjából két szimmetrikus érintő húzható k -hoz, ezek szimmetrikus M , M' pontpárt metszenek ki t -ből, amiből kiindulva éppen a kiszemelt P pontot kapjuk meg. A B és C pontban csak egy-egy érintő húzható k -hoz; az utóbbi nem metszi t -t, az előbbi viszont éppen t , így nem adható meg olyan pontpár, amelyikből kiindulva B -t vagy C -t kapnánk a mértani hely pontjaiként. Ebben az esetben tehát a BC egyenes k -n kívüli két félegyenesre a keresett mértani hely. (A PC és OA egyenes ebben az esetben egybeesik, ami megfelel állításunknak.)

Tegyük fel a továbbiakban, hogy A és B különböző.

Nyilvánvaló, hogy M és M' felcserélésével ismét A -ra tükrös pontpárt kapunk, a hozzájuk tartozó P pont pedig nem változik. Így elegendő azokat a P pontokat vizsgálni, amelyek az A -ból B -n át húzott félegyenesen levő M pontokhoz tartoznak; hiszen ha M a másik félegyenesen fut végig, akkor P az előbbi M pontokhoz tartozó mértani helyet futja be megegyezően.

Térjünk most állításunk bizonyítására. Az O pont a PMM' háromszög P -ből induló belső vagy külső szögfelezőjén van, aszerint hogy k az MM' szakaszt érinti, vagy annak meghosszabbítását. Jelöljük a kérdéses szögfelező és a PMM' háromszög köré írt kör metszéspontját D -vel. A belső szögfelező metszéspontja a P -t nem tartalmazó MM' ív felezőpontja, mivel pedig a belső és külső szögfelező egymásra merőleges, így P és a két szögfelező k -val való metszéspontja derékszögű háromszöget alkot. Ennek átfogója a körnek átmérője. Így a külső szögfelező a körülírt kört a belső szögfelező metszéspontjával árellelens pontban, vagyis a P -t tartalmazó MM' ív felezőpontjában metszi. Bármelyik pontból bocsátunk is merőlegest MM' -re, az azt felezőpontjában, A -ban metszi.

Állításunkat úgy bizonyítjuk, hogy megmutatjuk mindegyik esetben a COP és ADO háromszögek hasonlóságát. Könnyű látni, hogy az OPQ és DMA derékszögű háromszögek hasonlóak. Valóban, ha O a P -nél levő belső szög felezőjén van, akkor a kerületi szögek összefüggését felhasználva

$$DMA \sphericalangle = DMM' \sphericalangle = DPM' \sphericalangle = DPM \sphericalangle = OPQ \sphericalangle.$$

Ha pedig O a külső szögfelezőn van, akkor

$$DMA \sphericalangle = DMM' \sphericalangle = DPM' \sphericalangle = OPQ' \sphericalangle = OPQ \sphericalangle.$$

Az OPQ és DMA háromszög szögei tehát mindkét esetben megegyeznek s így

$$(1) \quad \frac{PO}{OQ} = \frac{MD}{DA}.$$

Itt OQ , mint körsugár, egyenlő OC -vel, állításunk igazolásához így szükségünk van annak a megmutatására, hogy $DO = DM$.

Ha k a PMM' háromszög beírt köre, akkor MO is a háromszög belső szögfelezője, s így, mint az MOP háromszög külső szöge

$$MOD \sphericalangle = OPM \sphericalangle + OMP \sphericalangle = DMM' \sphericalangle + OMM' \sphericalangle = DMO \sphericalangle.$$

Ha k az MM' oldalhoz hozzáírt kör, akkor MO a PMM' háromszög külső szögét felezi, s így ismét az MOP háromszögből indulva ki

$$\begin{aligned} MOD \sphericalangle &= 180^\circ - (OPM \sphericalangle + OMP \sphericalangle) = 180^\circ - (OPM \sphericalangle + M'MP \sphericalangle + \\ &+ OMM' \sphericalangle) = 180^\circ - (DMM' \sphericalangle + M'MP \sphericalangle + OMQ \sphericalangle) = DMO \sphericalangle. \end{aligned}$$

Ha k a PMM' háromszög PM oldalához hozzáírt kör, akkor PO is, MO is a háromszög megfelelő külső szögét felezi, s így ismét az MOP háromszögből indulva ki

$$\begin{aligned} MOD \sphericalangle &= 180^\circ - (OPM \sphericalangle + OMP \sphericalangle) = 180^\circ - (DMM' \sphericalangle + OMB \sphericalangle) = \\ &= DMO \sphericalangle. \end{aligned}$$

Eszerint az ODM háromszög OD -vel és DM -mel szemben levő szögei mindhárom esetben egyenlők, s így valóban $OD = DM$. Ezt, továbbá az említett $OQ = OC$ egyenlőséget felhasználva (1)-ből

$$\frac{PO}{OC} = \frac{OD}{DA}.$$

Az ADO és COP háromszögek itt szereplő oldalai párhuzamosak. Az első esetben D a t egyenes ellenkező partján van, mint k , s így DA és OB ellenkező irányban, DA és OC pedig egy irányban párhuzamos, DO és OP szintén.

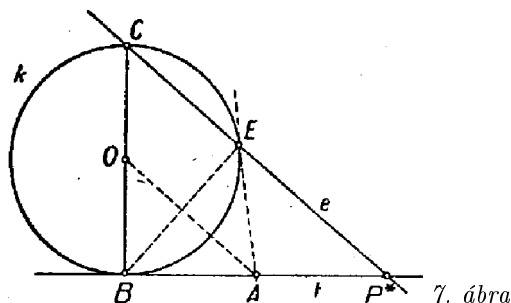
A második és harmadik esetben D és k a t egyenes egy partján van, így DA és OC ellenkező irányban párhuzamos. Másrészt D a második esetben az OP szakaszon van, a harmadik esetben a szakasz P -n túli meghosszabbításán, így OD és PO is ellenkező irányban párhuzamosak. Ennek folytán az ADO és COP háromszög mindhárom esetben hasonló, mert két oldaluk aránya és a köztük levő szög megegyezik, és hasonló helyzetű is. Így a harmadik oldalpár is párhuzamos:

$$PC \parallel OA.$$

Eszerint P mindig a C ponton át az (M ponttól független) OA egyenessel párhuzamos e egyenesen van. Nyilván nem lehet az egyenes k körbe eső húrján.

Ha P az e egyenes egy a körön kívüli és nem a t -n levő pontja, akkor húzzuk meg belőle az egyik érintőt k -hoz és tükrözzük ennek t -vel való metszéspontját A -ra. Az így kapott pontpárt választva M, M' -nek, az ezekből húzott érintők metszik egymást, mert csak az OA -val (s így e -vel is) párhuzamos érintőpár nem metszi egymást. A metszéspont egyrészt a bizonyítottak szerint e -n van, másrészt a meghúzott érintőn, tehát a kiválasztott P pont.

Legyen e metszéspontja t -vel P^* (7. ábra), ekkor OA párhuzamos a BCP^* háromszög CP^* oldalával és a BC oldal O felezőpontjából indul ki, tehát a háromszög középvonala; így A felezi a BP^* szakaszt, vagyis P^* a B pont tükörképe A -ra, de ekkor, mint a megoldás elején láttuk, a mértani hely B, P^* pontpárhoz tartozó pontja P^* .



Vizsgáljuk meg végül e metszéspontjait k -val. A C -ben húzott érintő párhuzamos t -vel, nem keletkezik tehát annak semelyik pontjából húzott érintőként, és nem megy át rajta a kör más pontjához húzott érintő sem. Így C nem tartozik a mértani helyhez.

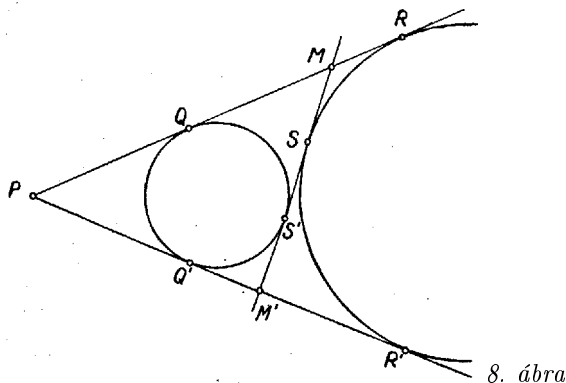
A másik E metszéspont nem más, mint az A -ból k -hoz húzott második érintő érintési pontja, ugyanis AO -ra tükrözve B -t a tükörkép egyrészt k -n van, mert annak középpontján átmenő egyenesre tükröztünk, másrészt e -n, mert egy háromszög egy csúcsát a szemközti oldallal párhuzamos középvonalra tükrözve a tükörkép a szemközti oldalán van. Így B tükörképe csak E lehet, és AE az AB egyenes tükörképe, tehát érinti a k kört.

Eszerint az E -ben húzott érintő A -ban metszi t -t. Ez a pont saját tükörképe, egybeeső M, M' pontpárt kapunk, a belőlük húzott második érintők is egybeesnek, tehát nincs meghatározott metszéspontjuk, s így E nem tartozik a mértani helyhez.

A keresett mértani hely tehát a C -n át AO -val párhuzamosan húzott (vagy C -n és az A -ból húzott érintő E érintési pontján át, vagy C -n és a B pont A -ra vonatkozó P^* tükörképén át húzott) egyenesnek a k -n kívül eső két félegyeneséből áll.

II. megoldás. A P pont lehetséges helyzeteire vonatkozó megállapításokat nem ismételjük meg és csak azt az esetet vizsgáljuk, ha $A \neq B$. Legyen D a B pont tükörképe A -ra. Azt fogjuk megmutatni, hogy P mindig a CD egyenesen van, mégpedig úgy, hogy először belátjuk, hogy ha k a PMM' háromszög beírt köre, akkor D az MM' oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja, ha k az MM' oldalhoz hozzáírt kör, akkor D a beírt kör érintési pontja, ha pedig k az MP oldalhoz hozzáírt kör, akkor D az $M'P$ oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja. Jelöljük a második kört mindhárom esetben k^* -gal, középpontját O^* -gal.

Az első két esetben a P -ből induló oldalak k és k^* közös külső érintői, MM' pedig az egyik közös belső érintő, a harmadik esetben pedig a P -n átmenő érintők a közös belső érintők, MM' pedig az egyik külső közös érintő. Állításunk ennek folytán úgy fogalmazható, hogy két kör egy közös külső érintőjén az érintési pontok közti szakasz, és a belső érintők metszéspontjai közti szakasz felezőpontja közös, és hasonlóan egy belső közös érintőn az érintési pontok és a külső közös érintők metszéspontja közti szakasz középpontja szintén azonos. Ezt fogjuk először bizonyítani.



Legyen tehát két kör két közös külső érintőjének metszéspontja P , az egyik érintő érintse a köröket Q , ill. R pontban, a másik Q' , ill. R' -ben (8. ábra). Egy közös belső érintő messe az előbbi egy M pontban, az utóbbit M' -ben, és legyen az M -hez közelebbi érintési pont S , a másik S' . Ekkor az egy pontból egy körhöz húzható érintők egyenlősége folytán

$$PR = PQ + QM + MR = PQ + S'M + SM = PQ + MM' + SM - M'S',$$

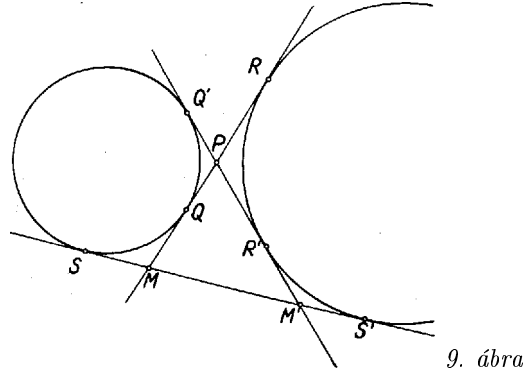
és hasonlóan

$$\begin{aligned} PR' &= PQ' + Q'M' + M'R' = PQ' + M'S' + M'S = \\ &= PQ' + MM' - MS + M'S'. \end{aligned}$$

Mivel még $PR = PR'$ és $PQ = PQ'$, így kell, hogy

$$MS - M'S' = M'S' - MS,$$

amiből $MS = M'S'$. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy az MM' és SS' szakaszok felezőpontja egybeesik.



9. ábra

Hasonló jelöléseket használva két közös belső érintő esetén (9. ábra)

$$PR = MR - PQ - QM = MS' - PQ - MS = MM' - PQ + M'S' - MS,$$

és hasonlóan

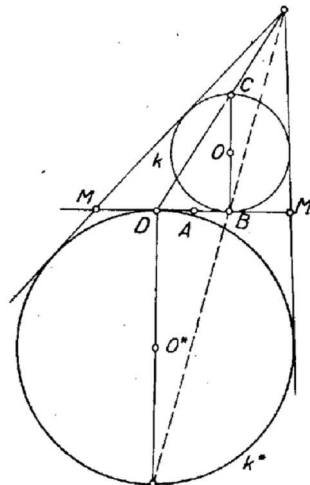
$$PR' = Q'M' - PQ' - R'M' = SM' - PQ' - M'S' = MM' - PQ' + SM - M'S'.$$

A két összefüggésből, mivel $PR = PR'$, $PQ = PQ'$, így ismét következik, hogy $MS = M'S'$, s így az MM' és SS' szakaszok felezőpontja ez esetben is egybeesik.

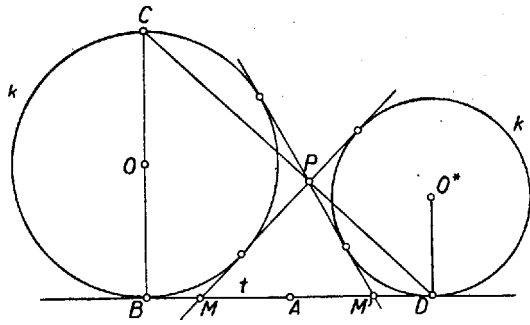
Ez feladatunkra alkalmazva valóban azt adja, hogy mind a három esetben k és k^* körök B és D érintési pontjai egymás tükörképei az MM' szakasz A felezőpontjára nézve, és ezt akartuk belátni.

P az első két esetben k és k^* külső hasonlósági pontja, a harmadik esetben pedig belső hasonlósági pontjuk, így következik, hogy P , C és D egy egyenesen vannak, ha belátjuk, hogy a mondott P középpontú hasonlóságoknál a C és D pont mindig megfelelő pontok.

Az első és második esetben k és k^* t különböző oldalán van (10. ábra), így OB , O^*D ellenkező irányban merőlegesek t -re, OC és O^*D tehát egyirányú párhuzamos sugarak, így a külső hasonlósági pontra nézve C és D a két kör egymásnak megfelelő pontjai.



10. ábra



11. ábra

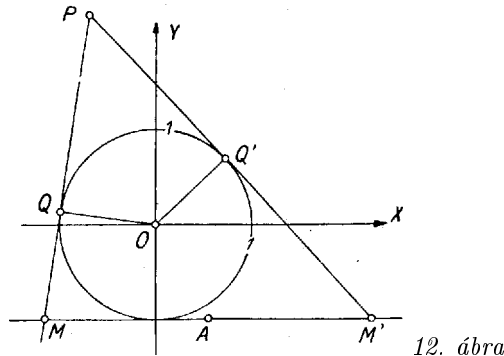
A harmadik esetben k és k^* t -nek ugyanazon az oldalán van (11. ábra), így OB és O^*D egy irányban, OC és O^*D tehát ellenkező irányban párhuzamosak. P most belső hasonlósági pont, erre nézve C és D ismét egymásnak megfelelő pontok. Ezzel bebizonyítottuk, hogy C , D és P mindig egy egyenesen van, vagyis, mivel a C és D pontok nem változnak M -mel, a mértani hely pontjai a CD egyenesen vannak.

Az, hogy ennek az egyenesnek mely pontjai tartoznak a mértani helyhez, az előbbi megoldáshoz teljesen hasonlóan tárgyalható. Ezt itt nem ismételjük meg.

A versenyzők legtöbbje a koordinátageometria módszereivel kereste a mértani helyet. Bemutatunk egy ilyen megoldást.

III. megoldás. Válasszuk origónak a k kör O középpontját, távolságegységének a sugarát, és az X -tengely legyen párhuzamos t -vel úgy, hogy t a $(0, -1)$ pontban érintse k -t. Jelöljük A abszcisszáját a -val, tehát A az $(a, -1)$ pont (12. ábra). Az M és M' pontok a t -n vannak, tehát $(z, -1)$, ill. $(z', -1)$ alakúak a koordinátáik. Mivel a köztük levő szakasz felezőpontja A , így

$$(1) \quad z + z' = 2a.$$



12. ábra

Az M , ill. M' pontból húzott érintő érintse a kört a $Q(u, v)$, ill. $Q'(u', v')$ pontban. Ekkor

$$(2) \quad u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2 = 1,$$

mert a pontok a körön vannak. Az OQ sugár iránytangense v/u (ha $u \neq 0$), így a Q -n át OQ -ra merőlegesen haladó egyenes egyenlete (ha $v \neq 0$)

$$y - v = -\frac{u}{v}(x - u), \quad \text{vagy} \quad ux + vy = u^2 + v^2 = 1.$$

Az egyenlet megadja a Q -n átmenő érintőt az $u = 0$ ($v = 1$, vagy $v = -1$) és a $v = 0$ ($u = 1$, vagy $u = -1$) esetben is.

Ez az érintő átmegy M -en, tehát

$$uz - v = 1, \quad v = uz - 1,$$

és ezt (2)-be írva

$$u^2 + (uz - 1)^2 = 1, \quad u[(1 + z^2)u - 2z] = 0.$$

Hagyjuk egyelőre figyelmen kívül az $u = 0$ esetet, ekkor

$$u = \frac{2z}{1 + z^2}, \quad \text{így} \quad v = uz - 1 = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1},$$

és az M pontból húzott érintő egyenlete így írható:

$$(3) \quad 2zx + (z^2 - 1)y = z^2 + 1.$$

Hasonlóan az M' ponton átmenő érintő egyenlete:

$$(3a) \quad 2z'x + (z'^2 - 1)y = z'^2 + 1.$$

A P metszéspont x_P, y_P koordinátáit kiszámíthatjuk pl. úgy, hogy az első egyenlet z' -szöröséből levonjuk a második z -szeresét:

$$\begin{aligned} [z'(z^2 - 1) - z(z'^2 - 1)]y_P &= z'(z^2 + 1) - z(z'^2 + 1), \\ (z - z')[(zz' + 1)y_P - zz' + 1] &= 0. \end{aligned}$$

Ismét hagyjuk figyelmen kívül egyelőre a $z = z'$ esetet (amikor M és M' egybeesik, s így megegyezik A -val), ekkor, amennyiben $zz' \neq -1$,

$$(4) \quad y_P = \frac{zz' - 1}{zz' + 1},$$

és ha $z \neq 0$, akkor pl. az M -ből húzott érintő egyenletéből

$$(5) \quad x_P = \frac{z^2 + 1}{2z} - \frac{z^2 - 1}{2z} \cdot \frac{zz' - 1}{zz' + 1} = \frac{z + z'}{zz' + 1} = \frac{2a}{zz' + 1}.$$

(Felhasználtuk az (1) összefüggést.) Az utóbbi egyenletből, ha $x_P \neq 0$

$$(6) \quad zz' = \frac{2a}{x_P} - 1,$$

és ezt y_P kifejezésbe beírva

$$y_P = \frac{\frac{2a}{x_P} - 2}{\frac{2a}{x_P}} = 1 - \frac{x_P}{a}, \text{ vagy } x_P + ay_P = a.$$

A keresett mértani hely pontjai tehát az

$$(7) \quad x + ay = a$$

egyenesen vannak, eltekintve esetleg a figyelmen kívül hagyott esetekhez tartozó pontoktól.

Vizsgáljuk meg, hogy (7) mely pontjai keletkeznek mint alkalmas M és M' pontokból húzott érintők metszéspontjai. Ezek azok a pontok, amelyek koordinátái alkalmas z és z' (valós) számokkal (4), (5) alakban írhatók. Az ilyen z (és (1) szerint neki megfelelő z') értéket az M -ből húzott érintő (3) egyenletéből számíthatjuk ki. Azt z szerint rendezve

$$(y - 1)z^2 + 2xz - y - 1 = 0.$$

Innen

$$z = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y - 1},$$

tehát azokhoz az x, y értékpárokhoz, az egyenesnek azokhoz a pontjaihoz tartozik ilyen z érték, amelyekre

$$x^2 + y^2 - 1 \geq 0,$$

vagyis amelyek nincsenek a k körben, és amelyekre $y \neq 1$, tehát a körrel való $(0, 1)$ metszéspontot is figyelmen kívül kell hagynunk. A második metszéspontra $x^2 + y^2 - 1 = 0$, de $y \neq 1$, így, felhasználva (7)-et

$$z = \frac{-x}{y - 1} = a,$$

ekkor (1)-ből $z' = a$. Az M és M' pont tehát egybeesik (és azonos A -val), így nincs a belőlük húzott érintőknek meghatározott metszéspontja. Ez a pont sem tartozik tehát a mértani helyhez. Ezzel a korábban kizárt $z = z'$ esetet is elintéztük, mert (1) szerint ekkor közös értékük csak a lehet.

Meg kell még vizsgálnunk a korábban a tárgyalásból kizárt eseteket, hogy tartozik-e azokhoz és milyen pontja a mértani helynek. Természetesen minden kizárt esettel együtt az M helyett M' -re vonatkozó megfelelő esetet is tárgyalni kell, ez azonban a két pont szimmetrikus szerepe miatt nem fog külön feladatot jelenteni.

Korábban figyelmen kívül hagytuk az $x = 0$ értéket. A (7) egyenes ehhez tartozó pontjának ordinátája $y = 1$, és éppen láttuk, hogy ez sem tartozik a mértani helyhez.

Kizártuk azt, hogy az M (vagy M') pontból húzott érintő érintési pontjának u (vagy u') abszcisszája 0 legyen. Ebben az esetben az érintési pont csak $(0, 1)$ vagy $(0, -1)$ lehet. Az előbbi eshetőséget már éppen kizártuk.

Az M -ből és M' -ből húzott „második”, azaz t -től különböző érintő viszont a $(0, -1)$ -től különböző pontban érinti k -t, kivéve, ha M (ill. M') éppen a $(0, -1)$ pont. Ekkor tekinthetjük „második” érintőnek is a t egyenest. Mivel ekkor z (vagy z') 0 , (1) miatta másik pont a $(2a, -1)$ pont, és a két érintő metszéspontja is ez a pont, ami a (7) egyenes metszéspontja t -vel. Ezt tehát a mértani helyhez tartozónak tekinthetjük. Ezzel egyszersmind a $z = 0$ és $z' = 0$ esetet is megtárgyaltuk.

Kizártuk végül korábban a $zz' = -1$ esetet. Ekkor pl. az M -ből húzott érintő (3) egyenletét 0 -ra redukálva és z'^2 -tel szorozva

$$2zz'^2x + [(zz')^2 - z'^2]y - (zz')^2 - z'^2 = -2z'z - (z'^2 - 1)y - 1 - z'^2 = 0.$$

Ez párhuzamos a másik érintővel, melynek $(3a)$ egyenlete

$$2z'x + (z'^2 - 1)y - 1 - z'^2 = 0$$

alakban írható, de különbözik attól, tehát az ilyen z , z' értékpárhoz nem tartozik metszéspont.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy a keresett mértani hely az $x + ay - a = 0$ egyenesnek a körön kívül eső két félegyenese, ami nem más, mint az A -ból húzott érintő érintési pontját és a t érintési pontjával átellenes pontot összekötő húrnak a körön kívüli meghosszabbítása mindkét irányban.

Megjegyzések. 1. A $zz' = -1$ esetben (1) -ből $z(2a - z) = -1$, azaz $z^2 = 2az + 1$, és így az M -ből húzott érintő egyenlete ilyen alakban írható:

$$2zx + 2azy = 2az + 2, \quad x + ay = a + \frac{1}{z}.$$

Ez párhuzamos a mértani hellyel. A fentiek szerint ugyanez áll az M' -ből húzott érintőre is.

2. A két érintő egyenletéből még egyszerűbben jutunk a mértani hely egyenletéhez, ha a két érintő 0 -ra redukált egyenletének különbségét képezzük és felhasználjuk (1) -et:

$$\begin{aligned} 0 &= 2zx + (z^2 - 1)y - 1 - z^2 - [2z'x + (z'^2 - 1)y - 1 - z'^2] = \\ &= 2(z - z')x + (z^2 - z'^2)y - (z^2 - z'^2) = \\ &= (z - z')(2x + (z + z')y - (z + z')) = 2(z - z')(x + ay - a). \end{aligned}$$

Ha az (x, y) pont rajta van mind a két érintőn, akkor kielégíti az utolsó egyenletet és ha $z \neq z'$, akkor (7) -et is. Azt a z értéket, amely egy adott (x, y) ponthoz vezet, most is ugyanúgy kereshetjük meg, mint az előbb.

3. Sok versenyző nem kereste a számítások lehetőleg egyszerű útját, és így nem maradt kellő ideje terve teljes végrehajtására.