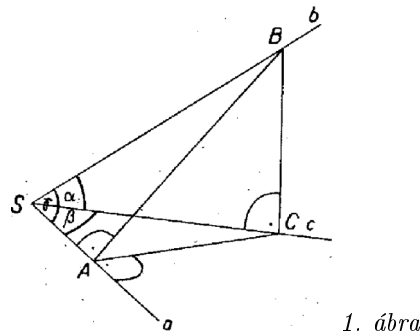


I. megoldás. Legyen az a félegyenes egy S -től különböző pontja A . Emeljünk a -ra az A pontban merőlegest a és c síkjában. Mivel α hegyesszög, ez metszi a c félegyenest egy C pontban. Hasonlóan c -re C pontjában merőlegest állítva c és b síkjában, ez metszi b -t egy B pontban (1. ábra).

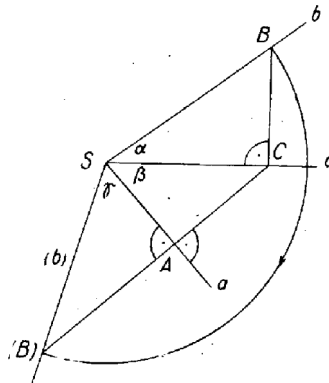


1. ábra

Az A, B, C -n átmenő Σ sík merőleges a -ra, ugyanis AC egyenese szerkesztés szerint merőleges a -ra, a CB egyenes pedig az SAC síkra merőleges SCB síkban van és merőleges a két sík SC metszészvonalára, így CB merőleges az SAC síkra, tehát annak minden egyenesére, így a -ra is. AC és CB tehát a Σ sík két a -ra merőleges egyenese, amelyek nem párhuzamosak. Így Σ merőleges a -ra, és az SAC szög mellett, ami szerkesztés szerint derékszög, derékszög az SAB szög is, és az ACB szög is, mert AC szára az SAC síkban van, CB pedig merőleges erre a síkra. Az SCB szög a szerkesztés szerint ugyancsak derékszög. A feladat feltételei szerint $BSC \sphericalangle = \alpha$, $CSA \sphericalangle = \beta$, és az $ASB \sphericalangle = \gamma$ szöget kell kiszámítanunk.

Most már az SBC , illetőleg SCA háromszögből $SC = SB \cos \alpha$, $SA = SC \cos \beta$, és így az SBA háromszögből

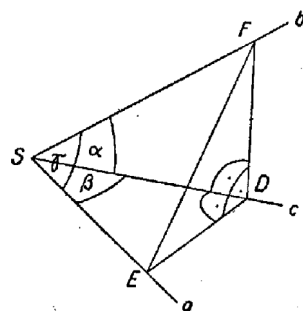
$$\cos \gamma = \cos ASB \sphericalangle = \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SB} \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta.$$



2. ábra

Megjegyzés. A felhasznált összefüggéseket még világosabbá tehetjük ábrázoló geometriai megfontolással. Tekintsük az a, c síkot első képsíknak, a b, c síkot második képsíknak, ekkor c a képsíkrendszer tengelyében van. A képsíkoknak az a , ill. b félegyenest tartalmazó felsíkjaikat, vegyük pozitívnak. Az a és b félegyenesekkel meghatározott síkot a – mint a sík első nyomegyenese – körül az első képsíkba leforgatva a 2. ábrát kapjuk, ezen mindhárom felhasznált derékszögű háromszög valódi nagyságban látható. (B) -et – különbségi háromszög mellőzésével – kimetszhetjük a C -n át a -ra állított merőlegesből az $SB = S(B)$ egyenlőség alapján, ugyanis az SB szakasz mind a második képsíkon, mind a leforgatásban valódi nagyságban látszik.

A legtöbb versenyző több trigonometriai ismeret felhasználásával – de viszont kevesebb diszkusszióval – végezte el a számítást. Ilyen a következő



3. ábra

II. megoldás. Legyen a c félegyenes egy S -től különböző pontja D , és emeljünk c -re merőlegest mind az a , c , mind a b , c síkban. Mivel α és β hegyesszögek, ezek metszik a -t E -ben, ill. b -t F -ben (3. ábra). Az EDF szög az SDE és SDF síkok hajlásszöge, tehát a DEF háromszögben D -nél derékszög van, továbbá az SED és SFD háromszögek is derékszögűek. A keresett γ szöget tartalmazó SEF háromszög mindhárom oldalát kifejezhetjük SD -vel és az ismert szögekkel:

$$SE = \frac{SD}{\cos \alpha}, \quad SF = \frac{SD}{\cos \beta},$$

továbbá $DE = SD \operatorname{tg} \beta$, $DF = SD \operatorname{tg} \alpha$,
és így

$$EF = \sqrt{DE^2 + DF^2} = SD \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Ezekkel a koszinusz-tétel alapján

$$\cos \gamma = \cos ESF \triangleleft = \frac{SE^2 + SF^2 - EF^2}{2SE \cdot SF}.$$

A számláló jól ismert azonosságok felhasználásával így alakítható:

$$\begin{aligned} SE^2 + SF^2 - EF^2 &= SD^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta \right) = \\ &= SD^2 \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}{\cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \beta \right) = 2SD^2, \end{aligned}$$

tehát

$$\cos \gamma = 2SD^2 : \frac{2SD^2}{\cos \alpha \cos \beta} = \cos \alpha \cos \beta.$$

Megjegyzés. Több versenyző rámutatott, hogy hasonlóan számíthatjuk γ -t akkor is, ha az a , c és b , c félegyenes-párokkal meghatározott síkok szöge tetszés szerinti ε szög. Az EDF szög éppen ezt a lapszöget méri, tehát

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2DE \cdot DF \cos \varepsilon,$$

és így $DE/SE = \sin \beta$, $DF/SF = \sin \alpha$ figyelembevételével

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \varepsilon.$$

Ezt az összefüggést a gömbháromszögtan *oldal-koszinusz-tételének* szokás nevezni; érvényességének feltételeivel itt tovább nem foglalkozunk.