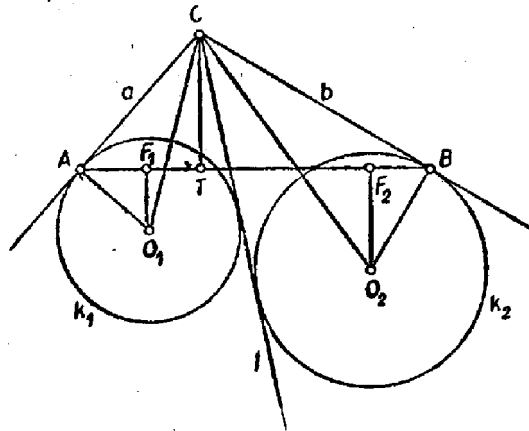


Az a és b félegyenesek közös kezdőpontját jelöljük C -vel, a két kör középpontját O_1 -gyel és O_2 -vel, e három pont vetületét az AB egyenesen T -vel, F_1 -gyel és F_2 -vel. A vizsgálandó húrok egyenlősége helyett nyilván elegendő a felüknek, AF_1 -nek és BF_2 -nek az egyenlőségét kimutatni.



1. ábra

Ha O_1 nem esik az AB egyenesre (azaz $BAC \angle \neq 90^\circ$, akkor az AO_1F_1 és a CAT derékszögű háromszögekben az A -nál, illetőleg C -nél levő szögek merőleges szárú hegyes szögek, ezért egyenlők, s így a két háromszög hasonló, tehát megfelelő oldalaik aránya egyenlő:

$$AF_1 : AO_1 = CT : CA,$$

ebből

$$(1) \quad AF_1 = \frac{AO_1}{CA} \cdot CT.$$

Ugyanígy a BO_2F_2 és CBT háromszögek hasonlósága alapján (hacsak $ABC \angle \neq 90^\circ$)

$$(2) \quad BF_2 = \frac{BO_2}{CB} \cdot CT.$$

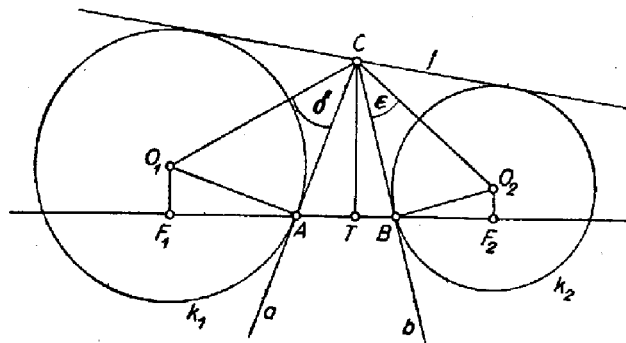
Az állítás igazolásához most már elegendő az AO_1/CA és BO_2/CB arányok egyenlőségét belátnunk. Ez viszont fennáll, mert tagjaik a CAO_1 és a CBO_2 derékszögű háromszögek befogói, e háromszögek pedig hasonlóak, mert C -nél levő szögük az a és b félegyenesek hajlásszögének negyedrésze.

Az ábrán az ABC háromszög A -nál és B -nél levő szöge hegyesszög, meggondolásunk azonban akkor is helyes marad, ha valamelyik (pl. az A -nál levő) szög tompaszög.

Abban az esetben viszont, ha pl. $CAO_1 \angle \neq 90^\circ$, az AB egyenes átmegy O_1 -en, a T pont egybeesik A -val, így

$$AF_1 = AO_1 = \frac{AO_1}{CA} \cdot CA = \frac{AO_1}{CA} \cdot CT,$$

tehát az (1) összefüggés ebben az esetben is fennáll. A bizonyítás további része változatlanul alkalmazható ebben az esetben is.



2. ábra

Megjegyzés. Az (1) és (2) összefüggések levezetésében nem használtuk ki, hogy f szögfelező; ezek még akkor is fennállnak, ha f az a és b határolta konkáv szögtérben van. (Ekkor a két kör érintési pontja f -en közrefogja C -t.) AO_1/AC , ill. BO_2/BC általában azon szögek felének a tangense, amelyet f -nek k_1 -et érintő félegyenese a -val, ill. k_2 -t érintő félegyenese b -vel zár be. Ezeket a félszögeket δ -val, ill. ε -nal jelölve (1) és (2) alapján a két körből kimetszett húrok hosszának arányára (ismét a húrok felével számolva)

$$\frac{AF_1}{BF_2} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varepsilon}.$$