

I. megoldás. Nem nehéz meghatározni a szóban forgó két számot – jelöljük ezeket x és y -nal –, majd negyedik hatványaik összegét. A feladat szerint

$$x + y = 10, \quad xy = 4,$$

így x és y a

$$z^2 - 10z + 4 = 0$$

másodfokú egyenlet két gyöke, vagyis $+5 + \sqrt{21}$ és $+5 - \sqrt{21}$ (bármelyiket tekinthetjük x -nek, a másik az y). Negyedik hatványaik összege

$$\begin{aligned} (5 + \sqrt{21})^4 + (5 - \sqrt{21})^4 &= ((5 + \sqrt{21})^2)^2 + ((5 - \sqrt{21})^2)^2 = \\ &= (46 + 10\sqrt{21})^2 + (46 - 10\sqrt{21})^2 = 2(46^2 + 10^2 \cdot 21) = 8432. \end{aligned}$$

II. megoldás. A feladatot egyszerűbben is megoldhatjuk, anélkül, hogy a két számot kiszámítanánk. Két szám negyedik hatványainak az összegét ugyanis általában kifejezhetjük a két szám összegének – jelöljük p -vel – és szorzatának – jelöljük q -val – a segítségével:

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2(xy)^2 = \\ &= (p^2 - 2q)^2 - 2q^2 = p^4 - 4p^2q + 2q^2. \end{aligned}$$

A $p = 10$ és $q = 4$ adatok behelyettesítésével:

$$x^4 + y^4 = 8432.$$

Megjegyzések. 1. A két szám negyedik hatványainak összegét az összegük és szorzatuk segítségével többféleképpen is felírhatjuk, pl.

$$\begin{aligned} (x + y)^4 &= x^4 + y^4 + 4x^3y + 4xy^3 + 6x^2y^2 = x^4 + y^4 + 4xy(x^2 + y^2) + \\ &+ 6(xy)^2 = x^4 + y^4 + 4xy((x + y)^2 - 2xy) + 6(xy)^2. \end{aligned}$$

Innen $x^4 + y^4$ -t kifejezve rendezés után ismét a fönti kifejezést nyerjük.

2. Az $x^4 + y^4$ polinom nem változik meg, ha benne x -et és y -t felcseréljük, ugyanez áll az $x + y$ és xy polinomokra is. Általában az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változók egy polinomját *szimmetrikus polinomnak* nevezzük, ha a változói helyébe ugyanezeket a változókat egy tetszés szerinti más sorrendben írva be a polinom nem változik meg (legfeljebb a tagok sorrendje változik). Ha $k \leq n$, az $x_1, x_2, \dots, x_n$ változókból képezhető összes k -tényezős szorzatok összegét a változók (k -adfokú) *elemi szimmetrikus polinomjának* nevezzük. Mármint az algebra egy nevezetes tétele szerint *minden szimmetrikus polinom kifejezhető a változói elemi szimmetrikus polinomjainak a polinomjaként. Ez a kifejezés* (összevont alakban) *a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.*

Ezt a kifejezést állítottuk elő a II. megoldásban, és nem véletlen, hogy ugyanarra az eredményre vezet az 1. megjegyzés átalakítása is.