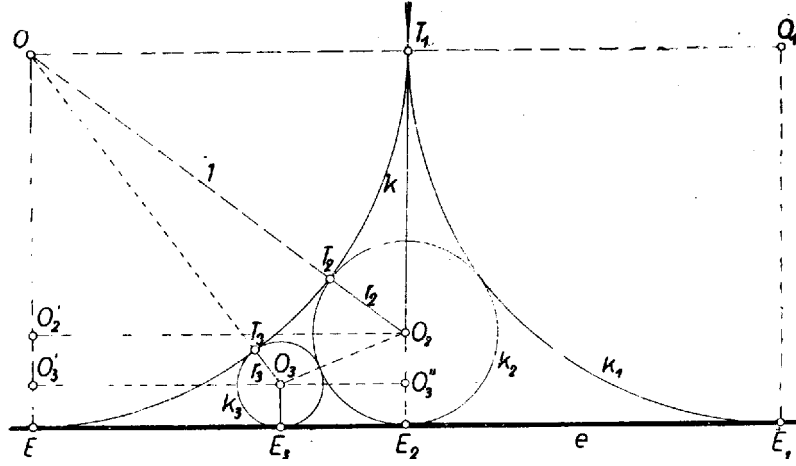




Legyen k és k_1 középpontja O , O_1 , e -vel való, valamint közös érintkezési pontjuk E , E_1 , ill. T_1 . Nyilvánvaló, hogy k_2 az EE_1 szakasszal és az ET_1 , E_1T_1 negyedkörívvel határolt síkrészben helyezkedik el, k -t és k_1 -et kívülről érinti, és O_2 középpontja az E_1E szakasz felező merőlegesén van. k_2 sugarát r_2 -vel, k -n, ill. e -n való érintési pontját T_2 , ill. E_2 -vel, és O_2 -nek OE -n való vetületét O'_2 -vel jelölve az $OO_2O'_2$ derékszögű háromszögből

$$OO_2^2 = O_2O_2'^2 + OO_2'^2 = E_2E^2 + (OE - O'_2E)^2,$$

azaz

$$(1 + r_2)^2 = 1 + (1 - r_2)^2,$$

és így $r_2 = 1/4$.

Világos, hogy k_3 gyanánt nem k_1 -et, hanem az EE_2 szakasszal és az ET_2 , E_2T_2 ívekkel határolt síkrészben fekvő kört kell tekintenünk, és hogy a $k_4, k_5, \dots, k_n$ körök is minden kisebb sorszámú körtől különböznek. Legyen a körsorozat két egymás utáni tagja k_i és k_{i+1} , sugaruk r_i, r_{i+1} , érintkezési pontjuk k -val, ill. e -vel $T_i, T_{i+1}, E_i, E_{i+1}$, középpontjuk O_i, O_{i+1} , és ennek vetülete OE -re O'_i , ill. O'_{i+1} , végül O_{i+1} vetülete O_iE_i -re O''_{i+1} (az ábrán az $i = 2$ eset látható). Ekkor az $OO_iO'_i, OO_{i+1}O'_{i+1}, O_iO_{i+1}O''_{i+1}$ derékszögű háromszögből:

$$EE_i = O'_iO_i = \sqrt{OO_i^2 - (OE - O'_iE)^2} = \sqrt{(1 + r_i)^2 - (1 - r_i)^2} = 2\sqrt{r_i},$$

ugyanígy

$$EE_{i+1} = 2\sqrt{r_{i+1}},$$

tehát

$$E_{i+1}E_i = O_{i+1}O''_{i+1} = \sqrt{O_iO_{i+1}^2 - O_iO''_{i+1}^2} = \sqrt{(r_i + r_{i+1})^2 - (r_i - r_{i+1})^2} = 2\sqrt{r_i r_{i+1}}.$$

Ezekkel $EE_i = EE_{i+1} + E_{i+1}E_i$ -ből

$$2\sqrt{r_i} = 2\sqrt{r_{i+1}} + 2\sqrt{r_i r_{i+1}},$$

és a jobb oldal második tagjával osztva

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}} = \frac{1}{\sqrt{r_i}} + 1.$$

Innen $r_2 = 1/4$ -del $r_3 = 1/9$, és ebből $r_4 = 1/16$. Az így adódott

$$(4) \quad r_i = \frac{1}{i^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{r_i}} = i$$

sejtés teljes indukcióval azonnal igazolható; ha ugyanis (4) érvényes, akkor (3)-ból

$$\frac{1}{\sqrt{r_{i+1}}} = i + 1, \quad \text{tehát} \quad r_{i+1} = \frac{1}{(i + 1)^2}.$$

Ezzel a feladat kérdésére a választ megkaptuk.