

Az (1) és (2) egyenletekből

$$(3) \quad \begin{aligned} (x+y)^2 - (x^2 + y^2) &= (a^2 - a)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2, \\ 2xy &= a(a-1)(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ kifejezést fogjuk átalakítani. Tagokra bontva és (1)-et felhasználva

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} = a(\sqrt{x} - \sqrt{y}) - 2\sqrt{xy}.$$

A jobb oldal utolsó tagját (3) alapján így alakíthatjuk át:

$$(4) \quad 2\sqrt{xy} = \sqrt{4xy} = \sqrt{2a(a-1)}(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Ezt behelyettesítve

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = \left(a - \sqrt{2a(a-1)}\right)(\sqrt{x} - \sqrt{y}).$$

Innen, ha $\sqrt{x} - \sqrt{y} \neq 0$, akkor

$$(5) \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} = a - \sqrt{2a(a-1)},$$

ha pedig $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 0$, akkor (2)-ből $x = y = 0$ adódik, ami a tetszős szerinti értéke mellett megoldása az egyenletrendszernek. A továbbiakban csak az ettől különböző megoldásokat keressük.

Meg tudjuk határozni $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ -hoz hasonlóan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ -t is, a négyzetét alakítva át (1), (4) és (5) felhasználásával:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 &= x + y + 2\sqrt{xy} = a(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{2a(a-1)}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) = \\ &= \left(a + \sqrt{2a(a-1)}\right)\left(a - \sqrt{2a(a-1)}\right) = a^2 - 2a(a-1) = a(2-a). \end{aligned}$$

Innen

$$(6) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a(2-a)}.$$

(5) és (6)-ból

$$(7) \quad \sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a(2-a)} - \sqrt{2a(a-1)} + a \right),$$

$$(8) \quad \sqrt{y} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a(2-a)} + \sqrt{2a(a-1)} - a \right).$$

Végül négyzetre emeléssel

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} [a(2-a) + 2a(a-1) + a^2 + 2a\sqrt{a(2-a)} - 2a\sqrt{2a(a-1)} - \\ &\quad - 2\sqrt{a(2-a)2a(a-1)}] = \\ &= \frac{1}{4} \left(2a^2 + 2a\sqrt{a(2-a)} - 2a\sqrt{2a(a-1)} - 2\sqrt{a(2-a)2a(a-1)} \right), \end{aligned}$$

azaz

$$(9) \quad x = \frac{1}{2} \left(a + \sqrt{a(2-a)} \right) \left(a - \sqrt{2a(a-1)} \right).$$

Ugyanígy nyerjük, hogy

$$(10) \quad y = \frac{1}{2} \left(a - \sqrt{a(2-a)} \right) \left(a - \sqrt{2a(a-1)} \right).$$

Ezek szerint csak (9) és (10) adhatja a feladat megoldását – eltekintve $x = y = 0$ -tól –, feltéve, hogy értelemmel bír a valós számok körében, azaz sem $a(2-a)$, sem $2a(a-1)$ nem negatív. Az első kifejezés a negatív és 2-nél nagyobb értékeire negatív, a második azokra, amelyekre $0 < a < 1$. Így csak $a = 0$ és $1 \leq a \leq 2$ értékek jönnek tekintetbe. Az $a = 0$ és $a = 2$ értékekre (9) és (10) a már tárgyalt $x = y = 0$ megoldást adja, $1 \leq a < 2$ -re ettől különböző értékpárokat. Az is világos, hogy az x -re és y -ra (amik (1) és (2)-ben négyzetgyökjel alatt is szerepelnek) kapott értékek nem negatívak, mert a $\sqrt{x}$ -re és $\sqrt{y}$ -ra kapott (7) és (8) kifejezések is valós számot adnak a szóba jövő a -értékekre, x és y pedig ezekből négyzetre emeléssel keletkezett.

Megmutatjuk még, hogy az $\sqrt{x}$ -re és $\sqrt{y}$ -ra kapott kifejezések sem negatívak. Ekkor ezen kifejezéseket is felhasználva behelyettesítéssel könnyen látható, hogy (9) és (10) valóban megoldását adja az egyenletrendszernek. (7)-ből a

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a(2-a)} - \sqrt{2a(a-1)} + a \right) = \frac{\sqrt{a}}{2} \left(\sqrt{a} + \sqrt{2-a} - \sqrt{2(a-1)} \right)$$

kifejezés a pozitív $\sqrt{a} + \sqrt{2-a} + \sqrt{2(a-1)}$ -gyel megszorozva a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{a}}{2}[(\sqrt{a} + \sqrt{2-a})^2 - 2(a-1)] &= \frac{\sqrt{a}}{2} \left(a + 2 - a + 2\sqrt{a(2-a)} - 2a + 2 \right) = \\ &= \sqrt{a} \left(\sqrt{a(2-a)} + 2 - a \right).\end{aligned}$$

Ez $1 \leq a < 2$ -re pozitív, tehát (7) jobb oldala is. Hasonlóan (8)-ból

$$\begin{aligned}\sqrt{y} \left(\sqrt{2-a} + \sqrt{2(a-1)} + \sqrt{a} \right) &= \frac{\sqrt{a}}{2} \left[\left(\sqrt{2-a} + \sqrt{2(a-1)} \right)^2 - a \right] = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} (2 - a + 2a - 2 + 2\sqrt{2(2-a)(a-1)} - a) = \sqrt{2a(2-a)(a-1)} \geq 0,\end{aligned}$$

ha $1 \leq a < 2$, tehát (8) bal oldala sem lehet negatív.

Ezzel beláttuk, hogy az (1), (2) egyenletrendszernek megoldása minden a mellett az $x = y = 0$ értékpár. Ezen kívül $1 \leq a < 2$ -re van megoldása, és azt a (7), (8) képletpár szolgáltatja.

Megjegyzések. 1. A közölt megoldás lényegében annak felel meg, hogy $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ és $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ helyett új változókat vezetünk be és először ezeket határozzuk meg.

2. Könnyen kiküszöbölhetjük az egyenletrendszerből a négyzetgyökös kifejezéseket, levonva a (2) a -szorosából (1) négyzetét:

$$\begin{aligned}a(x^2 + y^2) - (x + y)^2 &= a^2 (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 - [a(\sqrt{x} - \sqrt{y})]^2 = 0, \\ (a-1)x^2 - 2xy + (a-1)y^2 &= 0.\end{aligned}$$

Innen meghatározható az y/x hányados és ennek ismeretében (1)-ből x , majd y . Ezen az úton azonban kissé bonyolultabbak a számítások, mint a fenti megoldásban.