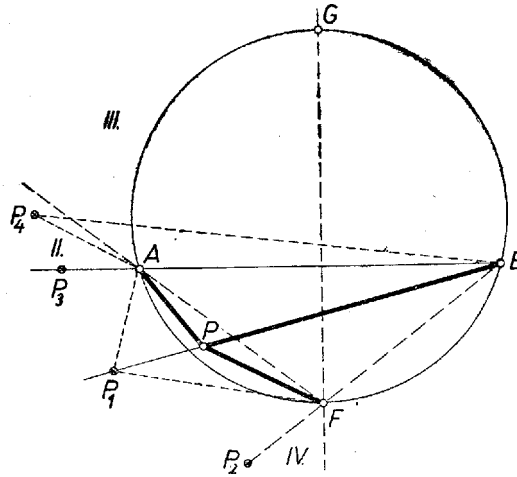


I. megoldás: A feltevések folytán P az F ponthoz tartozó FG átmérővel kettévágott k kör azon félkörének belsejében van, amelynek ívén A fekszik.

a) Tulajdonképpen csak az AFG szögtartományban fekvő P pontokra kell bizonyítást adnunk, mert az FA húrral lemetszett kisebb körszeletben levő P pontokra az állítás magától értetődő, hiszen ilyenkor A és B az FP egyenes ugyanazon partján vannak, és ezért az FPB szög része az APF szögnek (1. ábra).

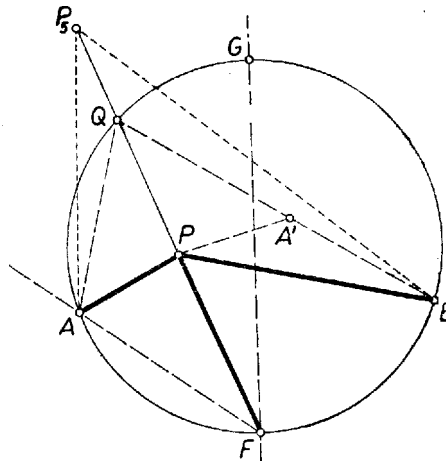


1. ábra

Másképpen: ilyen esetekben a PB félegyenes benne van az APF szögtartományban.

b) Ugyanez áll akkor is, ha P az FA húron van, mert ilyenkor az APF szög bármelyik irányú forgással 180° , az FPB szög pedig kisebb.

c) Ha P az AFG szögtartományban van, akkor FP szétválasztja A -t és B -t. (2. ábra).



2. ábra

Tükrözzük FP -re az APF szöget, legyen az A pont tükröképe A' . Ekkor elegendő azt igazolnunk, hogy az FPB szög része az FPA -val egyenlő FPA' szögnek. – Messe az FP egyenes k -t másodszor Q -ban. Így egyrészt az FQA és FQB szögek egyenlők, mert k -nak a szárai közötti FA , FB ívei egyenlők, másrészt a tükrözés folytán az FQA és FQA' szögek egyenlők, és ezért A' és QB egyenesen van, továbbá $QA' = QA < QB$, tehát A' a QB húr belső pontja. Így pedig a PB félegyenes valóban az $A'PF$ szögtartományban van.

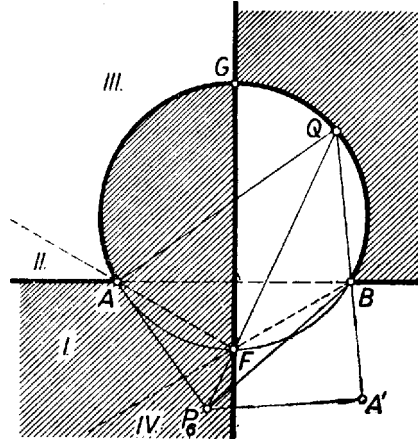
A fentiekben az állítást P minden lehetséges helyzetére igazoltuk.

Megjegyzések. 1. Nem használtuk fel, hogy az F -fel felezett AB ív kisebb félkörnél, ezért az állítás bármekkora AB ívre érvényes.

2. A bizonyítás a) részében nem használtuk fel, hogy P a k -n belül van, így meggondolásunk az ABF szögtartomány k -n és rajta kívül fekvő I. része minden pontjára érvényes (az 1. ábrán P_1), úgyszintén a BF szakasz F -en túli meghosszabbításának P_2 pontjaira is, mert így a P_2B és P_2F félegyenesek egybeesnek, szögük 0. Az I. síkrész másik határoló félegyenesén, a BA szakasz A -n túli meghosszabbításán levő P_3 pontokra viszont a két kérdéses szög azonos.

Kézenfekvő most már legalább vázlatosan áttekinteni a kérdéses szögek nagyságviszonyát minden az (1)-et teljesítő P pontra. Ha P kilép I-ből BA -nak A -n túli meghosszabbításán át, de nem lépi át FA -t (II. síkrész, P_4), akkor a PB félegyenes kilép az APF szögtartományból, APF része BPF -nek, (2) iránya ellentétesre fordul. Ugyanez adódik a III.

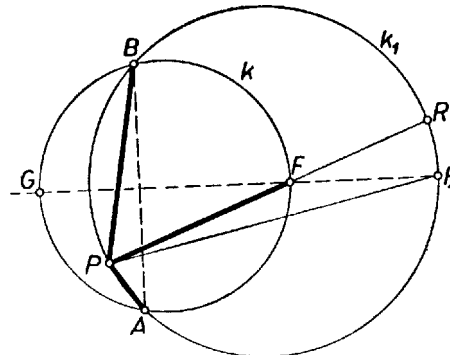
sík részben, vagyis ha P az AFG szögtartománynak k -n kívüli pontja (a 2. ábrán P_5), mert ilyenkor a c) alatti Q pont F és P_5 közé esik, és így $A'P_5F \triangleleft BP_5F \triangleleft$.



3. ábra

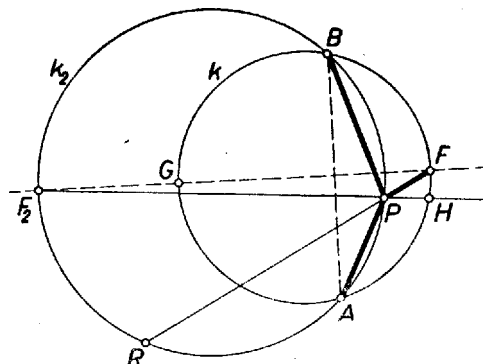
Végül a IV. síkrészben választott P_6 -tal Q a GB íven adódik (3. ábra), ezért $QA' > QB$, így $AP_6F \triangleleft = A'P_6F \triangleleft > BP_6F \triangleleft$, itt tehát érvényes (2). – Most már a $PA > PB$ követelmény mellett a megfelelő síkrészek határvonalait FG -re tükrözéssel kapjuk, így a 3. ábra csíkozott részein a kérdéses szögek közül APF nagyobb, a világosakon FPB nagyobb, a határvonalakon pedig a két szög – amint az könnyen belátható – egyenlő. (Mezei Ferenc „térképázlata”).

A további megoldásokban csak a fenti c) esettel foglalkozunk, ezt 3 alesetre bontjuk fel aszerint, hogy P az AB -nek F -fel ellentétes, ill. megegyező partján van – vagyis az utóbbi esetben az ABF háromszögben – vagy pedig magán az AB húron. – Mindkét további megoldás *Muszély György* megoldásainak egyszerűsítése.



4. ábra

II. megoldás: c_1) Ha P az AB -nek F -fel ellentétes oldalán van (4. ábra), akkor a kérdéses APF és FPB szögek a kisebb APB szögnek részei. Az A , B , P pontokon átmenő k_1 kör P -t nem tartalmazó, vagyis k -n kívül levő AB ívének F_1 felezőpontja az AB egyenesnek F -fel egyező oldalára, vagyis GF -nek F -en túl való meghosszabbítására esik. Így F_1 az APF szögtartományban van, F pedig az F_1PB szögtartományban. Ámde PF_1 felezi a kisebb APB szöget, ennél fogva az APF szög F_1PF szöggel nagyobb, az FPB szög pedig ugyanennyivel kisebb az APB szög felénél, ez megfelel az állításnak.



5. ábra

c_2) Ha P az AB -nek F -fel egyező oldalán van (5. ábra), akkor az A, B, P pontokon átmenő k_2 kör P -t nem tartalmazó, vagyis k -n kívül levő AB ívének F_2 felezőpontja az AB egyenesnek F -fel ellentétes oldalára, FG -nek G -n túl való meghosszabbítására esik. A kérdéses APF és FPB szögek egyenes szögnél nagyobb összegét ebben az esetben F_2P -nek P -n túl való PH meghosszabbítása felezi. A PH félegyenes FG -nek A -t tartalmazó oldalán van, ezért az APF szöget osztja részekre. Így az APF szög nagyobb, FPB pedig kisebb az $APH = HPB$ szögnél. Ezt kellett bizonyítanunk.

c_3) Végül ha P az AB szakaszon van, akkor (2) fennáll, mert APF tompaszög, FPB pedig hegyesszög.

Megjegyzések. 1. A c_2) aleset meggondolása nem alkalmazható az FA húrral lemetsett körszeletben felvett P -re, mert ilyen esetben a 180° -nál nagyobb APF szöget hasonlítanók az FPB szöghöz.

2. Lényegében a fenti meggondolást mondjuk el másképpen annak az R pontnak a helyzetét tekintetbe véve, ahol a PF egyenes a k_1 , ill. k_2 kört másodszor metszi.

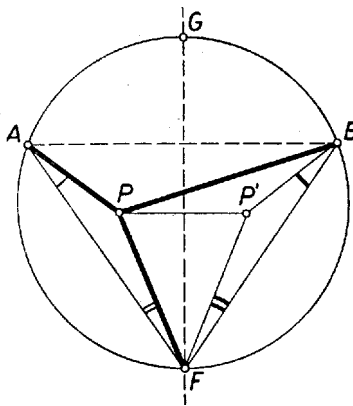
A c_1) esetben (4. ábra) F a k_1 -re nézve belső pont, ezért R egyrészt a PF szakasz F -en túl való meghosszabbításán van, FG -nek P -vel ellentétes, vagyis B -vel egyező oldalán. Másrészt R a P -t nem tartalmazó AB ívének pontja. Ezek szerint R a (rövidebb) BF_1 íven van. Így k_1 -nek AF_1R íve hosszabb a BR ívnél, tehát $APR < RPB$, vagyis $APF < FPB$.

A c_2) esetben (5. ábra) F a k_2 -re nézve külső pont, ezért R egyrészt az FP szakasz P -n túli meghosszabbításán van, FG -nek P -vel egyező, B -vel ellentétes oldalán, másrészt az AF_2B íven. Így R a (rövidebb) AF_2 ívének pontja, $\widehat{AR} < \widehat{RB}$, $APR < RPB$, ezért $180^\circ - APR < 180^\circ - RPB$, azaz $APF < FPB$.

III. megoldás: A feladat állítása akkor és csak akkor igaz, ha az APF háromszög A és F -nél levő (belső) szögeinek összege kisebb, mint a BPF háromszög B és F -nél levő (belső) szögeinek összege. Ezt fogjuk bizonyítani.

Legyen P tükörképe FG -re P' , így az $APP'B$ négyszög konvex trapéz.

A c_1) esetben P' az FBP szögtartományban van (6. ábra).



6. ábra

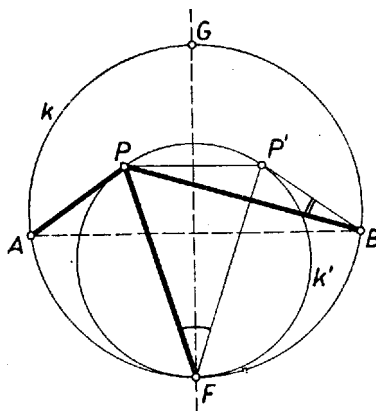
Ugyanis P és P' az ABP háromszög belsejében vannak, tehát $P'BA < FBA$, másrészt az ABP háromszögből (1) alapján $PBA < PAB = P'BA$. Ennélfogva

$$(3) \quad PAF < P'BF < PBF.$$

Másrészt P' a BFG szögtartományban van, amely része BFP -nek, ezért

$$(4) \quad PFA < P'FB < PFB.$$

Most már (3) és (4) két-két szélső tagjának összeadásával a kívánt egyenlőtlenség adódik.



7. ábra

Ha pedig AB elválasztja P -t és F -et (7. ábra), akkor egyrészt

$$(5) \quad PFB\angle - PFA\angle = PFB\angle - P'FB\angle = PFP'\angle,$$

ez pedig PP' látószöge F -ből; másrészt

$$(6) \quad PAF\angle - PBF\angle = P'BF\angle - PBF\angle = PBP'\angle,$$

ez pedig PP' látószöge B -ből; ekkor B ugyanazon oldalán fekszik PP' -nek, mint F . – Mármost a $PP'F$ háromszög köré írt k' kör érinti k -t F -ben, minden más pontja k belsejében van, így B a k' -re nézve külső pont. Ezért PP' -nek B -ből vett látószöge kisebb az F -ből vett látószögénél, azaz (5) és (6) alapján

$$PAF\angle - PBF\angle < PFB\angle - PFA\angle.$$

Innen pedig átrendezéssel

$$PAF\angle + PFA\angle < PBF\angle + PFB\angle,$$

amit bizonyítani akartunk.