

I. megoldás: Fejezzük ki az adott kapcsolatból x -et y -nal. Így megadhatjuk, mely y -okhoz lehet x -et kiszámítani, más szóval, hogy mely y számokhoz van olyan x érték, amelyre függvényünk az y értéket veszi fel, vagyis mi függvényünk értékkészlete. Ebből már kiválaszthatjuk a keresett maximumot, ill. minimumot – hacsak az értékkészletben van legnagyobb, ill. legkisebb szám.

A nevező sehol sem 0, mert $x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$, ezért az átszorzással és rendezéssel adódó

$$(y - 2)x^2 + (4y - 6)x + (5y - 6) = 0$$

kapcsolat ekvivalens az eredetivel. Innen

$$(1) \quad x = \frac{-4y + 6 \pm \sqrt{-4y^2 + 16y - 12}}{2(y - 2)},$$

hacsak $y \neq 2$, és $x = -2$, ha $y = 2$.

x a gyökképletből akkor és csak akkor adódik valósnak, ha a diszkrimináns nem negatív, vagyis ha – a másodfokú kifejezést mindjárt szorzattá alakítva –

$$-4(y - 1)(y - 3) \geq 0.$$

Ez pedig nyilván akkor és csak akkor teljesül, ha

$$1 \leq y \leq 3.$$

Ez a kettős egyenlőtlenség írja le függvényünk teljes értékkészletét, mert ennek a külön úton nyert fenti $y = 2$ szám is eleget tesz. Eszerint függvényünknek van maximuma is, minimuma is, és pedig az

$$y_{\max} = 3, \quad \text{ill.} \quad y_{\min} = 1$$

érték. Ezeket a függvény (1) szerint az

$$x_{\max} = -3, \quad \text{ill.} \quad x_{\min} = -1$$

helyen veszi fel.

Megjegyzés. Néhány dolgozat a helyes eredményre a következő téves megfontolással jutott el: „maximum és minimum azok az értékek, amelyeket a függvény csak egyszer vesz fel, ezek azok, ahol a diszkrimináns 0.” Eszerint minden elsőfokú függvény számára minden érték maximum volna és egyben minimum is; másrészt az $y = 1$ érték nem volna maximuma az $y = \sin x$ függvénynek, úgyszintén $y = -1$ sem volna ennek minimuma, mert mindegyik értéket végtelen sokszor veszi fel. Azt mutatja ez, hogy a szélső értékek fogalma egyedül a másodfokú függvényre alapult.

II. megoldás. Osztással és a nevezőben teljes négyzetté való kiegészítéssel az adott kifejezés így alakítható:

$$y = 2 - \frac{2x + 4}{x^2 + 4x + 5} = 2 - \frac{2(x + 2)}{(x + 2)^2 + 1},$$

majd $x + 2$ helyére új z változót írva

$$(2) \quad y = 2 - \frac{2z}{z^2 + 1} = 2 - 2y_1, \quad \text{ahol} \quad y_1 = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

Eszerint y -nak ott van maximuma, ahol az y_1 függvény minimális értéket vesz fel, és ott van minimuma, ahol y_1 maximális. y_1 lehet pozitív, negatív és 0, mert ugyanolyan jelű, mint a z számláló, hiszen nevezője pozitív, $z = 0$ mellett pedig $y_1 = 0$; ezért y_1 maximuma csak pozitív, minimuma csak negatív érték lehet. Elég y_1 -et pozitív z -k mellett vizsgálni, mert z és $-z$ mellett felvett értékei csak előjelben különböznek, tehát az így meghatározandó maximum értékének, és helyének (-1) -szerese megadja a minimum értékét és helyét.

További átalakítással

$$y_1 = \frac{z}{z^2 + 1} = \frac{1}{z + \frac{1}{z}}, \quad \text{azaz} \quad y_2 = z + \frac{1}{z},$$

így y_1 maximuma egyenlő az y_2 függvény minimumával. Vegyük észre, hogy pozitív z mellett az y_2 összeg két tagjának mértani közepe 1, állandó. Ismeretes másrészt, hogy pozitív számok számtani közepe sohasem kisebb mértani közepüknél, és akkor egyenlő vele, ha a számok egyenlők. Eszerint y_2 felének minimuma 1, így $y_{2,\min} = 2$, és ez akkor adódik, ha z az a pozitív szám, amelyre $z = 1/z$, vagyis $z = 1$.

Most már y_1 maximuma $1/2$, és a fentiek szerint minimuma a $z = -1$ helyen $y_{1,\min} = -1/2$; végül (2) szerint y minimuma 1, maximuma 3, és e szélső értékeket $x = z - 2$ figyelembevételével az $x = -1$, ill. $x = -3$ helyen veszi fel.

III. megoldás: Alakíthatjuk y -t a következők szerint is:

$$y = 1 + \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4x + 5} = 1 + \frac{(x + 1)^2}{(x + 2)^2 + 1},$$

$$y = 3 - \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 4x + 5} = 3 - \frac{(x + 3)^2}{(x + 2)^2 + 1}.$$

Az első alak második tagja sohasem negatív, mert számlálójá teljes négyzet és nevezője pozitív. Eszerint y minimumát $x + 1 = 0$ -nál, vagyis az $x = -1$ helyen veszi fel; itt a második tag 0, és y értéke 1. Hasonlóan a második alak kivonandója akkor legkisebb, ha $x + 3 = 0$, azaz $x = -3$, és itt értéke 0, tehát y maximuma 3.