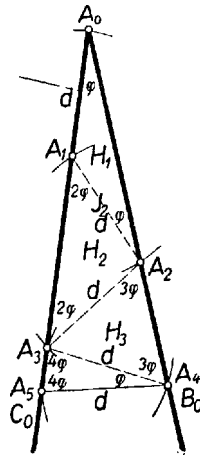


Legyen a BAC szög nagysága φ , így az ABC szög $n\varphi$. Ezek különbözők, ezért a háromszög szárai vagy A -ban, vagy B -ben futnak össze. Az állítást a két esetre külön-külön bizonyítjuk.

I. eset: a szárai AB és AC , tehát a C csúcsnál levő szög nagysága $n\varphi$, a szögek összegéből $\varphi = 180^\circ/(2n+1)$, ez hegyesszög, mert $2n+1 \geq 5$, és $n\varphi$ ugyancsak hegyesszög. – Elegendő egy olyan $A_0B_0C_0$ háromszöget adnunk, amely $n-1$ egyenes vágással n egyenlő szárú háromszögre bontható egyenlő hosszú szárakkal és hasonló az ABC háromszöghöz. Nyilvánvaló ugyanis, hogy az $A_0B_0C_0$ -t ABC -be átvívó hasonlósági transzformációval valamennyi vágásszakasz megfelelőjét ABC -ben megszerkesztve és e háromszöget a kapott szakaszok mentén szétdarabolva ebből is n egyenlő szárú háromszög áll elő egyenlő hosszú szárakkal.

Egy a kívánt tulajdonsággal bíró $A_0B_0C_0$ háromszöget egy A_0 csúcsú, φ nagyságú szögből kiindulva a következő, $n+1$ lépésből álló és lépésenként 1–1 újabb segédpontot előállító szerkesztéssorozattal kaphatunk. A segédpontokat rendre $A_1, A_2, \dots, A_n, A_{n+1}$ -gyel jelöljük. Első lépésül A_0 -ból egy tetszés szerinti $A_0A_1 = d$ szakaszt mérünk a szög egyik szárára (1. ábra, ezen $n = 4$).

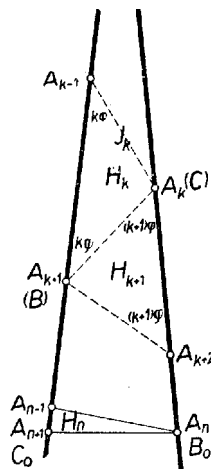


1. ábra

A 2. lépésben A_1 körül d sugárral kört írva A_2 -ként vesszük e körnek a szög másik szárán levő, A_0 -tól különböző metszéspontját. A további pontokat váltakozva a szög egyik és másik szárából metsszük ki az utoljára kapott pont körül d sugárral írt körívvel és mindig úgy, hogy azok a korábbi metszéspontoktól különbözők legyenek. Így A_3 gyanánt az A_2 körül d sugárral írt körnek a szög első, A_0A_1 szárán levő, A_1 -től különböző metszéspontját vesszük. Az $n+1$ -edik lépés után A_n -t B_0 -nak, A_{n+1} -et C_0 -nak véve előttünk áll a kívánt $A_0B_0C_0$ háromszög, és ezt az A_1 -től A_n -ig terjedő egymás utáni $n-1$ segédpontpárt összekötő $n-1$ egyenlő szakasz darabolja fel a kívánt módon.

Mivel az A_0 -nál levő φ szög hegyesszög, azért A_2 valóban a másik száron jön létre. Az $A_1A_0A_2 = H_1$ háromszög egyenlő szárú, így A_2 -nél levő szöge is φ , tehát A_1 -nél levő külső szöge $\varphi + \varphi = 2\varphi$. – Ez is hegyesszög, ezért A_3 az A_0 -tól távolabb jön létre, mint A_1 . Így az említett külső szög az $A_2A_1A_3 = H_2$ egyenlőszárú háromszögnek belső szöge, tehát H_2 -nek A_3 -nál levő szöge is 2φ , továbbá H_2 kívül áll H_1 -en, A_1A_2 oldaluk közös, A_1 -be befutó A_1A_3 és A_1A_0 oldalaik egymás meghosszabbításai, így együtt kitöltik az $A_0A_2A_3 = J_2$ háromszöget. Ezért az $A_1A_3A_2$ szög J_2 -nek is szöge, ennél fogva J_2 -nek A_2 -nél levő külső szöge $\varphi + 2\varphi = 3\varphi$. – Ha $n > 2$, vagyis $n \geq 3$, akkor 3φ is hegyesszög, így A_4 távolabb van A_0 -tól, mint A_2 . Ezért az $A_3A_2A_4 = H_3$ egyenlő szárú háromszög kívülről csatlakozik J_2 -höz és A_4 -nél levő szöge is 3φ , egyenlő az utóbbi külső szöggel. Az $A_3A_4A_2$ szög a J_2 és H_3 -ból összetevődő $A_0A_3A_4 = J_3$ háromszögnek is szöge, így J_3 -nak A_3 -nál levő külső szöge $\varphi + 3\varphi = 4\varphi$.

Teljes indukcióval minden $k \leq n$ -re könnyű belátni, hogy az $A_kA_{k-1}A_{k+1} = H_k$ egyenlő szárú háromszögben $A_kA_{k-1}A_{k+1} \triangleleft A_kA_{k+1}A_{k-1} \triangleleft k\varphi$ (2. ábra).



2. ábra

Ennek helyességét $k = 1$, 2-re és $n \geq 3$ mellett $k = 3$ -ra az előzőekben láttuk. Ha már most k olyan az n -nél kisebb szám, amelyre állításunk érvényes, akkor érvényes $k + 1$ -re is. Ugyanis $k < n$ folytán $k + 1 \leq n$, és így a műveletsorozat még folytatódik. Az $A_0A_kA_{k+1} = J_k$ háromszög A_k -nál levő külső szöge $(k + 1)\varphi \leq n\varphi < 90^\circ$, ezért az A_{k+1} körüli d sugarú körrel az A_0A_k szárból kimetszett A_{k+2} távolabb van A_0 -tól, mint A_k , tehát az $A_{k+1}A_kA_{k+2} = H_{k+1}$ egyenlő szárú háromszög kívülről csatlakozik J_k -hoz. Így J_k -nak A_k -nál levő $(k + 1)\varphi$ nagyságú külső szöge H_{k+1} -nek belső szöge, tehát $A_kA_{k+2}A_{k+1} \triangleleft = A_{k+2}A_kA_{k+1} \triangleleft = (k + 1)\varphi$. Ezek szerint állításunk érvényessége valóban öröklődik minden az n -nél kisebb k -ról $k + 1$ -re.

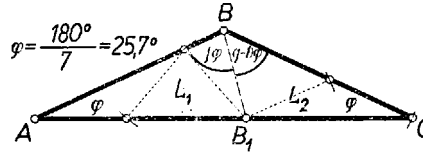
Tekintsük most már a $J_n = A_0A_nA_{n+1} = A_0B_0C_0$ háromszöget. Ebben a fentiek szerint $A_0C_0B_0 \triangleleft = A_0A_{n+1}A_n \triangleleft = A_{n-1}A_{n+1}A_n \triangleleft = n\varphi$, és ezért $A_0B_0C_0 \triangleleft = 180^\circ - \varphi - n\varphi = (2n + 1)\varphi - (1 + n)\varphi = n\varphi$. Így J_n egyenlő szárú, a szögek egyenlősége folytán hasonló az adott ABC háromszöghöz és maradéktalanul szétvágható a $H_1, H_2, \dots, H_n$ egyenlő szárú háromszögekre. A szerkesztéssorozat első és utolsó lépése, az A_0A_1 és A_nA_{n+1} szakasz nem vágandó, tehát a vágások száma $(n + 1) - 2 = n - 1$. Mindezek szerint J_n -nek megvan a kívánt tulajdonsága. Ezt kellett megmutatnunk.

Továbbhaladás előtt vegyük észre, hogy az $A_0B_0C_0$ háromszögben $B_0C_0 = A_nA_{n+1} = d$. Ennek alapján megtakaríthatjuk a hasonlósági transzformációt: a fenti szerkesztéssorozatot az adott háromszögben A -ból kezdve és $d = BC$ -vel végrehajtván azonnal a kívánt felbontást kapjuk. Így A_n és A_{n+1} kitűzése elmarad. A szerkesztéssorozatot fordított sorrendben, azaz B vagy C -ből kezdve is végrehajthatjuk, ilyenkor A_{n-1} az első szerkesztett pont.

Vegyük észre azt is, hogy szerkesztéssorozatunk első $k + 1$ lépésével, ill. az $A_1A_2 \dots A_{k-1}A_k$ vágássorozat $k - 1$ vágásával, az $A_0A_kA_{k+1} = J_k$ (nem egyenlő szárú) háromszöget is az előírt tulajdonságú háromszögekre daraboltuk (itt A_kA_{k+1} nem vágandó, mert J_k határának tekintjük). A felhasznált feltételeket áttekintve látjuk, hogy a következő általánosabb tételt bizonyítottuk be: Minden olyan ABC háromszög, melyben a B csúcsnál hegyes szög van és ez k -szor akkora, mint az A csúcsnál levő szög, – ahol k az 1-nél nagyobb egész szám, – szétvágható $k - 1$ egyenes vágással k számú olyan egyenlő szárú háromszögre, hogy valamennyi rész-háromszög szárai egyenlők; a vágásszakaszok hossza a BC oldallal egyenlő. (Az első vágást célszerű C -ből indítani; de indulhat páros k esetén az AB oldal, páratlan k esetén az AC oldal azon A_1 pontjából is, melyre $AA_1 = BC$.)

II. eset: a száraz BA és BC , a C -nél levő szög φ . Az állítást n párossága szerint két alesetben bizonyítjuk.

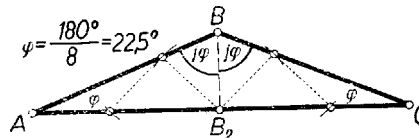
II/1. aleset: n páratlan. Legyen $n = 2j - 1$, ahol $j > 1$, egész szám, így a szögek összegéből $\varphi = 180^\circ / (2j + 1)$. A bizonyítást visszavezethetjük az I. esetre. Mérjük fel az AB szárat A -tól az AC alapra (3. ábra).



3. ábra

Az előálló B_1 végpont az AC szakaszon van, mert $n\varphi > \varphi$ folytán $AC > AB$. A háromszöget BB_1 mentén kettévágva az $ABB_1 = L_1$ és $CBB_1 = L_2$ háromszögekre már alkalmazhatjuk a fenti általános tételt. Ugyanis L_1 egyenlő szárú, és a BB_1 alapon levő szögeinek nagysága $(180^\circ - \varphi)/2 = (2j + 1 - 1)\varphi/2 = j\varphi = j \cdot pBAB_1 \triangleleft$. Ennélfogva L_2 -ben $CBB_1 \triangleleft = CBA \triangleleft - B_1BA \triangleleft = (2j - 1)\varphi - j\varphi = (j - 1)\varphi = (j - 1) \cdot CB_1B \triangleleft$. Továbbá a B -nél levő részszőgek hegyesszőgek, mert az ABB_1 szög egy egyenlő szárú háromszögnek alapon levő szöge, a $CBB_1 \triangleleft = (j - 1)\varphi$ pedig kisebb $ABB_1 \triangleleft = j\varphi$ -nél. A vágásszakasz hossza L_1 és L_2 -ben egyaránt BB_1 , mint az A , ill. C -nél levő φ szöggel szemben fekvő oldal. A vágások száma $1 + (j - 1) + (j - 2) = 2j - 2 = n - 1$, a létrejövő háromszögek száma pedig $j + (j - 1) = 2j - 1 = n$, amint bizonyítanunk kellett.

II/2. aleset: n páros: $n = 2j$, ahol $j \geq 1$, egész szám. Vágjuk ketté az ABC háromszöget a B csúcsból induló BB_2 magasságvonallal (4. ábra).



4. ábra

A létrejött egybevágó ABB_2 és CBB_2 derékszögű háromszögek B -nél levő szögei hegyesszőgek és $n/2 = j$ -szer akkorák, mint az A , ill. C -nél fekvő szögek. Így a két rész-háromszög a fenti tétel szerint az előírásnak megfelelően feldarabolható (ill. $j = 1$, azaz $n = 2$ esetén már fel is van darabolva), tehát az eredeti háromszög is. A vágásszakaszok hossza BB_2 , a vágások száma az egész háromszögben $1 + 2(j - 1) = 2j - 1 = n - 1$, és az egyenlő szárú rész-háromszögek száma $2j = n$ az állításnak megfelelően. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. A feldarabolhatóság bizonyításában az I. esetben a B -nél levő $n\varphi$, szög csúcsából kiinduló vágással is kezdhettük volna vágási sorozatunkat. Így be kellett volna bizonyítanunk, hogy az utolsó vágás utáni maradék-háromszög ugyancsak egyenlő szárú.