

I. megoldás: Igyekezzünk az (1) egyenlőtlenséget olyan alakra hozni, melynek helyessége már nyilvánvaló. Szorozzuk meg (1)-et a feltevés szerint pozitív $2a$ számmal, elegendő az így nyert

$$2a^2 + 2ac - 2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \leq 4ac - b^2$$

egyenlőtlenséget igazolni, vagy ehelyett is az átrendezéssel keletkezett

$$(2) \quad 2a^2 - 2ac + b^2 \leq 2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2}$$

egyenlőtlenséget.

a) Ha itt a bal oldal negatív, azaz $2a^2 - 2ac + b^2 < 0$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, mert a jobb oldal a négyzetgyök egyértelmű értelmezése, valamint a feltevés folytán nem lehet negatív. Mivel eddig csak megfordítható átalakításokat végeztünk, ebben az esetben a kiindulási egyenlőtlenség is helyes, mégpedig az egyenlőtlenség jele áll fenn.

b) Ha pedig a bal oldal nem-negatív, akkor elég megmutatni, hogy a bal oldal négyzete nem nagyobb a jobb oldal négyzeténél:

$$(3) \quad (2a^2 - 2ac + b^2)^2 \leq 4a^2(a-c)^2 + 4a^2b^2 = (2a^2 - 2ac)^2 + 4a^2b^2.$$

A jobb oldal első tagját a bal oldalra áthozva és a két négyzet különbségét szorzattá alakítva:

$$b^2(4a^2 - 4ac + b^2) \leq 4a^2b^2,$$

végül minden tagot a jobb oldalra gyűjtve

$$(4) \quad 0 \leq b^2(4ac - b^2).$$

Mivel itt az első tényező mindig, a második pedig a feltevés szerint nem-negatív, azért a szorzat valóban nem negatív, és mint láttuk, ebből következik az eredeti egyenlőtlenség helyessége. Egyenlőség (4)-ben és ezzel együtt az előző egyenlőtlenségekben is csak a $b^2 = 0$, vagy a $4ac - b^2 = 0$ esetben lehetséges.

Ha azonban valamely a, b, c értékrendszerrel (4)-ben és így (3)-ban is egyenlőség teljesül, ebből visszafelé nem föltétlenül következik, hogy (2)-ben és így (1)-ben is egyenlőség áll fenn, mert (2) jobb oldala pozitív, a bal azonban nem föltétlenül. Így a fönt említett két esetben meg kell még vizsgálnunk, állhat-e – és ha igen, milyen feltételek mellett – (1)-ben egyenlőség.

$b = 0$ esetén (1) így alakul:

$$\begin{aligned} a + c - |a - c| &\leq 2c, \\ a - c &\leq |a - c|, \end{aligned}$$

itt egyenlőség csak $a \geq c$ esetén áll fenn.

$4ac - b^2 = 0$ esetén (1) így alakul:

$$\begin{aligned} a + c - |a + c| &\leq 0, \\ a + c &\leq |a + c|, \end{aligned}$$

itt csak $a + c \geq 0$ esetén áll fenn egyenlőség. Ez azonban mindig teljesül, mert $4ac = b^2 \geq 0$ és $a > 0$ folytán $c \geq 0$.

Mindezek szerint (1) a feltevések mellett mindig teljesül, egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha vagy

- 1) $b = 0$ és $a \geq c$, vagy
- 2) $4ac - b^2 = 0$.

Megjegyzések: 1. Többen a negatív oldalakat tartalmazó

$$-2a\sqrt{(a-c)^2 + b^2} \leq -(2a^2 - 2ac + b^2)$$

egyenlőtlenség gépies négyzetreemelésével a bizonyítandó egyenlőtlenségnek éppen az ellenkezőjét vélték „bizonyítani”. Ezek a versenyzők a négyzetre emeléskor hibáztak, mert hiszen pl. $-5 < 4$, és $-5 < -4$, de négyzetreemelés után már $25 > 16$ egyenlőtlenség áll fenn.

2. Azokra az a, b, c értékrendszerekre, amelyekre (2) bal oldala negatív, az eredeti egyenlőtlenség $4ac - b^2$ előjelétől függetlenül teljesül. (Itt csak a pozitív voltát használtuk ki.)

Azokra az a, b, c értékrendszerekre, amelyekre (2) bal oldala nem-negatív, $4ac - b^2 \leq 0$ és $a > 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség fordítottja igaz; $a < 0$ és $4ac - b^2 \geq 0$ esetén az egyenlőtlenségnek szintén az ellenkezője igaz; és végül $a < 0$ és $4ac - b^2 \leq 0$ esetén az eredeti egyenlőtlenség igaz.

II. megoldás: Vonjuk ki a vizsgálandó egyenlőtlenség bal oldalát a jobb oldalból; átalakítás és összevonás után

$$(5) \quad \frac{4ac - b^2}{2a} - (a + c) + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{(a - c)^2 + b^2} - (a - c) - \frac{b^2}{2a} \geq 0.$$

Ebből egyszerűbb kifejezés adódik, ha megszorozzuk a

$$(6) \quad \sqrt{(a - c)^2 + b^2} + (a - c) + \frac{b^2}{2a}$$

értékkel. Ez a szorzó nem negatív, mert nagyobb vagy egyenlő, mint $|a - c| + (a - c)$, ami pedig nem negatív, és 0 is csak $b = 0$, $a \leq c$ esetben lesz, de ekkor (5) bal oldala $|a - c| - (a - c) = 2(c - a) \geq 0$, tehát a bizonyítandó állítás érvényes.

Ha (6) értéke pozitív, és megszorozzuk vele (5)-öt, akkor

$$(7) \quad \left(\sqrt{(a - c)^2 + b^2} - (a - c) - \frac{b^2}{2a} \right) \cdot \left(\sqrt{(a - c)^2 + b^2} + (a - c) + \frac{b^2}{2a} \right) =$$

$$= (a - c)^2 + b^2 - \left[(a - c) + \frac{b^2}{2a} \right]^2 = b^2 - \frac{b^2}{a}(a - c) - \frac{b^4}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2(4ac - b^2)}{4a^2} \geq 0.$$

Ebből következik az állítás helyessége. Az egyenlőség esetének vizsgálata ugyanúgy történhet, mint az I. megoldásban.

Megjegyzés: A (6) kifejezés átalakításából adódik, hogy

$$\sqrt{(a - c)^2 + b^2} + (a - c) + \frac{b^2}{2a} = \sqrt{(a + c)^2 - (4ac - b^2)} + (a + c) - \frac{4ac - b^2}{2a} \leq 2(a + c).$$

Ha a (7) bal oldalán (6) helyébe a nála nagyobb vagy egyenlő (pozitív) $2(a + c)$ -t tesszük és átosztunk vele, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{(a - c)^2 + b^2} - (a - c) - \frac{b^2}{2a} \geq \frac{b^2(4ac - b^2)}{8a^2(a + c)},$$

és ebből további átalakítással

$$(8) \quad (a + c) - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \leq \left(1 - \frac{b^2}{4a(a + c)} \right) \cdot \frac{4ac - b^2}{2a}.$$

Ez a feladatban kitűzött állításnál erősebb állítás. Ugyanis a jobb oldal első tényezőjének értéke általában kisebb 1-nél.

III. megoldás: Az (1) egyenlőtlenség bal oldala nem negatív, mert

$$a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} = a + c - \sqrt{(a + c)^2 - (4ac - b^2)} \geq a + c - |a + c| = 0,$$

ugyanis a feltétel szerint $4ac - b^2 \geq 0$, és $a > 0$, tehát $c \geq 0$, és így $a + c > 0$.

Ha pozitív a bal oldal (vagyis ha $4ac - b^2 \geq 0$), akkor osszuk el vele mindkét oldalt. Ekkor azt kell megmutatni, hogy a mondott feltételek mellett

$$(9) \quad A = \frac{\frac{4ac - b^2}{2a}}{a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}} \geq 1.$$

Gyöktelenítsük a nevezőt:

$$(10) \quad A = \frac{(4ac - b^2) \left(a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right)}{2a[(a + c)^2 - (a - c)^2 - b^2]} =$$

$$= \frac{(4ac - b^2) \left(a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right)}{2a(4ac - b^2)}.$$

Ha $4ac - b^2$ -ről feltettük, hogy nem zérus, egyszerűsítve vele

$$A = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{2a} \geq \frac{a + c + |a - c|}{2a},$$

és itt ha $a) a \geq c$, akkor a jobb oldalon $2a/2a = 1$ áll,
ha pedig $b) a < c$, akkor a jobb oldal értéke $2c/2a > 1$,
tehát mindig $A \geq 1$.

Egyenlőség csak az $a)$ esetben állhat, éspedig akkor és csak akkor, ha

$$\sqrt{(a - c)^2 + b^2} = |a - c|, \quad \text{azaz ha } b = 0.$$

Ha viszont a $4ac - b^2$ kifejezés eltűnik, akkor, mint láttuk, az eredeti egyenlőtlenség bal oldala eltűnik, és eltűnik a jobb oldal is, tehát ez esetben is helyes az állítás, mégpedig egyenlőség áll fenn.

Megjegyzés: Míg az előző megoldásból egy élesebb felső becslést sikerült kapnunk, addig ebből a megoldásból (1) bal oldalára alsó becslést kaphatunk. Ha $4ac - b^2$ pozitív, akkor (10)-ben egyszerűsítve vele

$$A = \frac{a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2}}{2a} = \frac{a + c + \sqrt{(a + c)^2 - (4ac - b^2)}}{2a}.$$

A tört értékét határozottan növeljük, ha a gyökjel alatti pozitív kivonandót elhagyjuk:

$$A < \frac{a + c + |a + c|}{2a} = \frac{2(a + c)}{2a} = \frac{a + c}{a}.$$

A értékét (9)-ből beírva és átszorozva kapjuk

$$\frac{4ac - b^2}{2a} < \left[a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \right] \cdot \frac{a + c}{a},$$

vagyis

$$(11) \quad \frac{a}{a + c} \cdot \frac{4ac - b^2}{2a} < a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2}.$$

Ez akkor is teljesül, ha (1)-ben $b = 0$ és $a \geq c$ folytán egyenlőség áll fenn; ha pedig $4ac - b^2 = 0$, akkor (11) is egyenlőségbe megy át, mert mindkét oldal értéke 0.

Így (9) és (11)-gyel (1) bal oldalát a következő korlátok közé szorítottuk:

$$\frac{a}{a + c} \cdot \frac{4ac - b^2}{2a} \leq a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2} \leq \left(1 - \frac{b^2}{4a(a + c)} \right) \cdot \frac{4ac - b^2}{2a}.$$