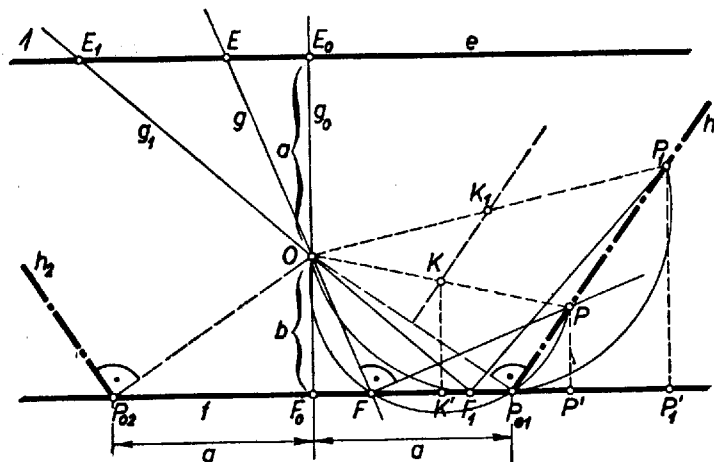


I. megoldás: Legyen g -nek az f -re merőleges helyzete g_0 , ennek metszéspontjai e , f -en E_0 , F_0 . Ekkor a kérdéses merőleges maga f , így az e -vel való metszéspont nem létezik, P nem szerkeszthető egyértelműen; azonban f -nek F_0 -tól $OE_0 = a$ távolságra fekvő P_{01} és P_{02} pontjait tágabb értelemben a mértani helyhez tartozóknak tekinthetjük. – Elegendő g -nek azon helyzeteivel foglalkoznunk, amelyek f -et az F_0P_{01} félegyenesén metszik, mert a mértani helynek az így mellőzött pontjait a figyelembe vettek közül g_0 -ra való tükrözéssel megkaphatjuk, hiszen g minden mellőzött helyzetének megvan a tükörképe a figyelembe vett helyzetek között.



Legyen a forgó egyenesnek egy g helyzetében OP felezőpontja K , P és K vetülete f -en P' , K' . Ekkor az FPP' és $OEEO$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert $FP = OE$, továbbá F , ill. O -nál levő szögek merőleges szárú hegyes szögek, és ezért egyenlők. Így $FP' = OE_0 = a = F_0P_{01}$ és F a P' -től ellentétes irányban van, mint P_{01} az F_0 -tól (ugyanis az F_0FP szög nagyobb az OFP szögnél, ez pedig derékszög). Ezért P_{01} és F tükrös párok az F_0P' szakasz felező merőlegesére – ami egyben az $OF_0P'P$ trapéz KK' középvonala –, és így $KP_{01} = KF$. Másrészt K az OFP derékszögű háromszög köré írt kör középpontja. Ezek szerint e kör átmegy P_{01} -en és ezért az $OP_{01}P$ szög (g bármely helyzete mellett) derékszög; más szóval P csak a P_{01} -ben OP_{01} -re állított merőlegesen fekszik. Tegyük hozzá: az FP szakaszok felmérési irányára tekintettel P a merőlegesnek csak azon a h_1 félegyenesén lehet, amely f -nek ugyanazon partján van, mint e (és O).

Megmutatjuk, hogy a figyelembe vett g helyzetekre a keresett mértani hely éppen h_1 , vagyis h_1 bármely P_{01} -től különböző P_1 pontja előáll g valamely helyzetéből.

g_1 -nek a P_1 -et előállító helyzetére, ill. a vele adódó E_1 , F_1 -re egyrészt a P_1F_1O szögnek derékszögnek, másrészt $F_1P_1 = OE_1$ -nek kell lennie. Az első követelményből g_1 egyértelműen megszerkeszthető, ehhez F_1 -et az OP_1 átmérőjű (és $P_1P_{01}O \angle = 90^\circ$ folytán P_{01} -en átmenő) Thalész-körnek f -fel való, P_{01} -től különböző metszéspontja adja – amennyiben két ilyen metszéspont van –, és $F_1 \equiv P_{01}$, ha e kör érinti f -et. E kör K_1 középpontja rajta van az $F_0P'_1$ szakasz felező merőlegesén (P'_1 a P_1 vetülete f -en), így F_1 és P_{01} tükrös pontpár $F_0P'_1$ felezőpontjára, és ezért $F_1P'_1 = F_0P_{01} = OE_0$. Így az OE_1E_0 és $F_1P_1P'_1$ derékszögű háromszögek egybevágók (E_1 a g_1 és e metszéspontja), mert O , ill. F_1 -nél fekvő szögük szárai páronként merőlegesek (Thalész-kör), ennél fogva $OE_1 = F_1P_1$ amit bizonyítani akartunk. (Teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy F_1 az F_0P_{01} félegyenesen van, mert nem lehet sem F_0 -ban, sem az F_0P_{02} félegyenesen; ugyanis F_0 a körre nézve külső pont, K_1 az OP_0 szakasz felező merőlegesének azon a félegyenesén van, amely OP_{01} -nek F_0 -val ellentétes oldalára esik, az utóbbinak pontjai pedig F_0 -tól távolabb vannak, mint P_{01} -től.)

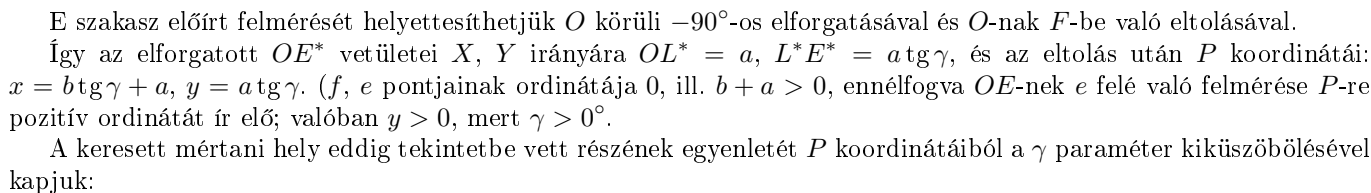
Ezek szerint a keresett mértani helyet h_1 és ennek g_0 -ra való h_2 tükörképe adja, vagyis az f egyenes $F_0P_{01} = F_0P_{02} = OE_0$ tulajdonságú P_{01} , P_{02} pontjaiban OP_{01} , ill. OP_{02} -re állított merőlegeseknek azok a félegyenesei, amelyek f -nek O -t tartalmazó partján vannak. P_{01} és P_{02} a mértani helynek csupán tágabb értelemben vett pontjai.

Megjegyzések. 1. $FP' = F_0P_{01}$ megállapítása után – ahol a szakaszok iránya is megegyező –, vizsgálatunkat így is befejezhetjük: eszerint $P_{01}P' = F_0F$, másrészt $PP' = EE_0$, ennél fogva $PP' : P_{01}P' = EE_0 : F_0F = OE_0 : OF_0 = a : b$, azaz állandó, tehát bármely P -be P_{01} -ből ugyanaz az irány mutat. Így azonban még hátra van ennek az iránynak a meghatározása.

2. Többen pontos rajzú próbák nélkül azt a pusztán szabaddézi vázlatra alapított sejtésüket próbálták igazolni, hogy a mértani hely kör, hiperbola, hiányos parabola, vagy két kotangens-görbe.

A versenyzők nagyobb része a koordináta-geometria módszereivel kereste a mértani hely egyenletét, gyakran elég bonyolult számításokkal, a szakaszfelmérest egyenes és kör metszésének tekintve, ami két lehetőséget ad P -re, a helyes irány megválasztása pedig diszkussziót igényel. Alább egy ezt a lépést kikerülő, részben koordináta-geometriai megoldást adunk.

II. megoldás: Válasszuk f -et X -, és a rá O -n át húzott merőlegest Y -tengelynek úgy, hogy O ordinátája b legyen, és legyen a kezdőpont K , továbbá e és az Y -tengely metszéspontja L . Tekintsük egyelőre azokat a g -ket, amelyek az X -tengelyt pozitív abszcisszájú F -ben metszik, és jellemezzük g helyzetét azzal a γ pozitív hegyes szöggel, amellyel O körül az Y -tengelyhez képest el van fordulva. Így F , E koordinátái: $(btg\gamma, 0)$, $(-atg\gamma, b+a)$ és a felmérendő $OE = z$ szakasznak az Y -tengelyre való vetülete a , az X -tengely irányára pedig $LE = -atg\gamma$.



Így az elforgatott OE^* vetületei X, Y irányára $OL^* = a$, $L^*E^* = a \operatorname{tg} \gamma$, és az eltolás után P koordinátái: $x = b \operatorname{tg} \gamma + a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$. (f, e pontjainak ordinátája 0, ill. $b + a > 0$, ennél fogva OE -nek e felé való felmérése P -re pozitív ordinátát ír elő; valóban $y > 0$, mert $\gamma > 0^\circ$).

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{x-a}{b} = \frac{y}{a} \text{ -ból : } y = \frac{a}{b}(x-a),$$

Hasonlóan kapjuk az X -tengelyt negatív abszcisszájú F -ben metsző g egyenesekre $F(-b \operatorname{tg} \gamma, 0)$ és $E(a \operatorname{tg} \gamma, b + a)$ -ből P -re: $x = -b \operatorname{tg} \gamma - a$, $y = a \operatorname{tg} \gamma$ (itt γ a g elfordulása Y -tól a negatív forgási irányban). Eszerint P abszcisszája az előbbinek -1 -szerese, ordinátája változatlan, ez az Y -tengelyre való tükrözést jelent, ennél fogva a mértani hely hiányzó része az eddigiből az f -re O -n át húzott merőlegesen való tükrözéssel áll elő.

2. OE -nek a g -re merőlegesen való felmérésével adódó pontot megkaphatjuk a merőleges és a g -ből (rá merőleges) OE nagyságú eltolással előálló g' egyenes metszéspontjaként is. Így azonban mindegyik említett egyenes egyenletét fel kellene írunk, és többet kellene számolnunk. Az „ e felé” való eltolás révén a g' -vel az Y -ból lementezett szakasz b -ről $b + OE/\sin \gamma = b + a/\sin \gamma \cos \gamma$ -ra növekszik.