

I. megoldás: Mindkét ismeretlen értéke csak a $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 999$ számok egyike lehet, de az egyik értékének megválasztása korlátozást jelent a másikéra. Menjünk végig x minden egyes értékén, és állapítsuk meg a mellette lehetséges, vele megoldást adó y -értékek számát; kérdésünkre ezen számok összege adja meg a választ. – Vegyük először x nemnegatív értékeit.

$x = 0$ mellett $|y| < 1000$, azaz $-1000 < y < 1000$, ennek $-999, -998, \dots, -1, 0, 1, \dots, 999$ tesznek eleget, számuk $2 \cdot 999 + 1 = 1999$.

$x = 1$ mellett $|y| < 999$, az előbbinél 2-vel kevesebb megoldás van, mert $y = \pm 999$ már nem felel meg.

Általában is, x valamely értékéről az 1-gyel nagyobbra áttérve $|y|$ -nek legnagyobb lehetséges értéke 1-gyel kisebbnek adódik, így y előbbi értékei közül kettőt kell törölnünk, az x, y megoldások száma 2-vel csökken. Így a megoldások számai $x = 0, 1, 2, \dots, 999$ -re számtani sorozatot alkotnak. Az utolsó tag $x = 999$ -cel: 1, a tagok száma 1000, és így összegük:

$$\frac{1000(1999 + 1)}{2} = 1000^2.$$

$x = -1, -2, \dots, -999$ esetén $|x| = 1, 2, \dots, 999$, így az előzőkhöz hasonlóan az ilyen megoldások együttes száma

$$1997 + 1995 + \dots + 1 = 999^2.$$

Ezzel valamennyi megoldást figyelembe vettük, összes számuk: $1000^2 + 999^2 = 1\,998\,001$.

II. megoldás: A kérdés egyértelmű a következővel: hány olyan x, y egész számpár van, amelyre az $|x| + |y|$ összeg vagy 0-val, vagy 1-gyel, vagy 2-vel, $\dots$, vagy 999-cel egyenlő? Állapítsuk meg tehát általában az $|x| + |y| = k$ egyenlet egész számokban való megoldásainak N_k számát, – ahol k nemnegatív egész szám –, és képezzük ezek összegét $k = 0, 1, 2, \dots, 999$ -re.

$k = 0$ esetén egy megoldás van: $x = y = 0$.

$k = 1$ esetén négy megfelelő értékpár van:

1, 0; -1, 0; 0, 1; 0, -1.

$k \geq 2$ esetén a megoldásokat két csoportba osztjuk aszerint, hogy fellép-e bennük a 0 szám, vagy nem. Az elsőbe a $k = 1$ esethez hasonlóan 4 megoldás jut: $k, 0; -k, 0; 0, k; 0, -k$. A második csoportban $|x|$ a következő $k - 1$ értéket veheti fel:

$$|x| = j = 1, 2, 3, \dots, k - 1,$$

és evvel $|y|$ is meg van határozva:

$$|y| = k - j = k - 1, k - 2, k - 3, \dots, 1.$$

j minden fenti értékével az előjelek figyelembevétele során $2 \cdot 2 = 4$ megoldás adódik, mert j és $k - j$ mindegyike számára egymástól függetlenül 2-féleképpen választhatjuk az előjelet:

$$j, k - j; \quad -j, k - j; \quad j, -(k - j); \quad -j, -(k - j),$$

tehát itt a megoldások száma $4(k - 1)$. – Végeredményben $k \geq 2$ esetén a megoldások száma $4 + 4(k - 1) = 4k$. Ez a kifejezés $k = 1$ esetén is helyes, ekkor a második csoportba nem tartozik megoldás; $k = 0$ -ra azonban nem érvényes.

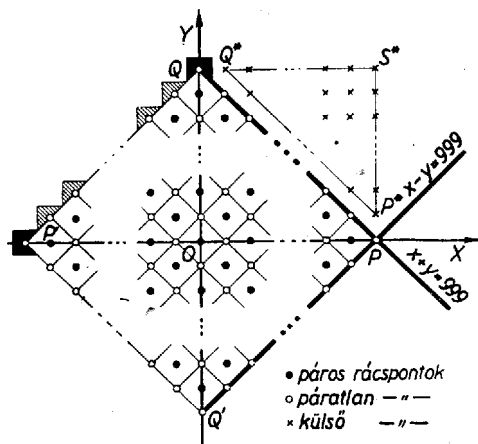
Ezek után $k = 0, 1, 2, \dots, 999$ -re

$$N = 1 + 4(1 + 2 + 3 + \dots + 999) = 1 + 4 \cdot \frac{999 \cdot 1000}{2} = 1\,998\,001.$$

Megjegyzés. Ugyanígy, ha s nemnegatív egész szám, akkor az $|x| + |y| < s$ egyenlőtlenség megoldásainak száma egész számokban:

$$N_s = 1 + 4[1 + 2 + 3 + \dots + (s - 1)] = 2s^2 - 2s + 1.$$

III. megoldás: Minden egyes megoldást a derékszögű koordináta-rendszerben egy ún. rácspont ábrázol, vagyis olyan pont, amelynek mindkét koordinátája egész szám. Jellemezzük e rácspontok helyzetét, majd ennek alapján számukat megállapítva adjunk választ kérdésünkre.



Az adott egyenlőtlenség így is írható:

$$|x| + |y| \leq 999.$$

Tekintsük átmenetileg csak azokat a megoldásokat, amelyekben x és y egyike sem negatív. Így $|x| = x$ és $|y| = y$, teljesül tehát

$$(1) \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{és} \quad x + y \leq 999.$$

Az ezen korlátozásoknak eleget tevőrádspontok nem lehetnek az $x = 0$ egyenestől (az Y -tengelytől) balra, az $y = 0$ -tól (X -tengely) lefelé, és az $x + y = 999$ egyenestől „jobbra fölfelé”. Más szóval: (1)-nek csak az ezen három egyenessel bezárt OPQ derékszögű háromszög csúsaiban, oldalszakaszain és belsejében fekvő rádspontok tehetnek eleget, ahol O , P és Q koordinátái: $(0, 0)$, $(999, 0)$ és $(0, 999)$.

Fordítva: ha valamely x , y rádspont eleget tesz ezen geometriai előírásoknak, akkor az x , y számpárra, továbbá – negatív értékeket ismét megengedve – vele együtt a $-x$, y , az x , $-y$ és a $-x$, $-y$ párokra is teljesül az adott egyenlőtlenség. Az utóbbi számpároknak megfelelő rádspontok azoknak az $OP'Q$, OPQ' , ill. $OP'Q'$ háromszögeknek a kerületén és a belsejében vannak, amelyek OPQ -ből az Y -ra, X -re, ill. O -ra való tükrözéssel keletkeznek. A négy háromszög együtt hézagatlanul kitölti a $PQP'Q'$ négyzetet, ahol $P'(-999, 0)$ és $Q'(0, -999)$.

Számuk megállapítása céljára e négyzet rádspontjait többféleképpen rendezhetjük.

a) Valamelyik tengellyel, pl. az Y -nal párhuzamos sorok (rácsegyenesek) szerinti számlálással lényegében az I. megoldást ismételjük. – Hasonlóan a II. megoldás is értelmezhető pontszámlálásként, meggondolásunkat a $PQP'Q'$ -höz hasonló helyzetű azon négyzetek kerületein való számlálás szemlélteti, melyeknek közös középpontja O , és átlója rendre $2, 4, 6, \dots, 1998$ egység, és ehhez hozzávesszük az origót. (x , y -on valós számokat értve pl. $|x| + |y| = 999$ a $PQP'Q'$ négyzet kerületének egyenlete.)

b) A $PQP'Q'$ négyzet oldalaival párhuzamos rácsegyenesek mentén való számlálásban célszerű a rádspontokat két csoportra, páratlanokra és párosakra osztani az $x + y$ összeg páratlan, ill. páros volta szerint, és a számlálást csoportonként végezni. Ugyanis PQ vagy PQ' irányú mozgással sem páros rádspontból páratlanba nem lehet átjutni, sem fordítva, így a pontok e két irányra nézve nem egyszerű hálót alkotnak, számuk nem állapítható meg pusztán szorzással. Valóban, a PQ irányú egyenesek egyenlete $x + y = c$ alakú, ahol c állandó, tehát ezeken mozogva $x + y$ párossága is változatlan; és ugyanez áll PQ' irányú egyenesen való mozgás esetén is, mert egyenletük $x - y = d$ alakú, ahol d állandó, és két egész szám különbsége ugyanolyan párosságú, mint az összege. – Minden rádspont vagy páros, vagy páratlan. Könnyen belátható, hogy páratlan rádspontjaink PQ és PQ' -vel párhuzamosan ezer-ezer sort alkotnak, számuk 1000^2 , a párosaké pedig hasonlóan 999^2 .

c) Rádspontjaink számát különbséggént is megkaphatjuk: véve a P és P' , ill. Q és Q' pontokon át az Y , ill. X -tengellyel párhuzamos egyenesek által határolt négyzet $1999^2 = 3\,996\,001$ rádspontját, és ebből elhagyva a $PQP'Q'$ -négyzeten kívül, a négy sarki háromszögben fekvőket, mint számunkra feleslegeseket. Ez utóbbiak együttes száma $4(1 + 2 + \dots + 999) = 1\,998\,000$. A jobb felső ilyen háromszög csúcsai: $P^*(999, 1)$, $Q^*(1, 999)$ és $S^*(999, 999)$. Így $N = 3\,996\,001 - 1\,998\,000 = 1\,998\,001$.

d) A rádspontok száma területszámítás útján is megállapítható. Rendeljük hozzá minden R rádspont-hoz annak az egységnyi oldalú „elemi” négyzetnek a területét, amelynek középpontja R és oldalai párhuzamosak a tengelyekkel. Így – ha valamely, a koordinátarendszerben fekvő idom területe csupa ilyen négyzetre bontható fel, – akkor annyi rádspontot tartalmaz, ahány egységnyi a területe. – Vegyük hozzá a $PQP'Q'$ négyzethez a kerületén fekvő rádspontokhoz tartozó elemi négyzeteknek a $PQP'Q'$ -n kívül fekvő részeit, így egy „fogazott négyzetet” kapunk. A P , Q , P' , Q' rádspontok elemi négyzetéből egyenkint $3/4$ területegységnyi rész fekszik „kívül”, összesen 3 egység, a PQ , QP' , $P'Q'$, $Q'P$ oldalszakaszok belsejében fekvő $4 \cdot 998 = 3992$ rádspontból pedig egyenkint $1/2$ területegységnyi rész, összesen 1996 egység. Mivel még $\overline{PQ} = 999\sqrt{2}$, azért a fogazott négyzet területe $2 \cdot 999^2 + 3 + 1996 = 1\,998\,001$ egység, megegyezésben fentebbi eredményünkkel.